

# Normalisering af billedafledte i skalarum ved hjælp af den fraktale dimension

Kim S. Pedersen

14. Januar, 1999

## 1 Forord

Denne rapport er udarbejdet af Kim S. Pedersen i perioden 1. december 1996 til 5 marts 1998. Rapporten er et skriftlig 2. dels projekt på Datalogisk institut ved Københavns Universitet. Vejlederen på projektet er Mads Nielsen. Projektets arbejdsbelastning er 8 punkter. Dette skriftlige projekt består af to komponenter: Denne rapport samt den vedlagte artikel. Der er blevet ansøgt om optagelse af artiklen til ICIP konferencen 1998 i Chicago.

## 2 Indledning

I litteraturen findes en række undersøgelser af den fraktale dimension af intensitetsfladerne af billeder af naturlige scener, [Fie87, KFK90, RB94, Pen84, Vos85]. Det konkluderes af blandt andre disse forfattere at billeder af naturlige scener har et Fourier spektrum som aftager approksimativt med  $1/f$ , hvor  $f$  er frekvensen. Denne egenskab kaldes  $1/f$  støj og har indflydelse på den fraktale dimension af billedet. Der er uenighed om, hvilken værdi den fraktale dimension af billeder af naturlige scener har. Værdien af den fraktale dimension varierer omkring 2.5 alt afhængig af, hvilken type naturlige scener man har benyttet som statistisk materiale ved udregning af dimensionen. Field har i [Fie87] benyttet seks forskellige billeder. Billederne består af træer, sten og havbølger. For denne type billeder finder han, at den fraktale dimension er 2.5. I artiklen [KFK90] har Field et al. eksperimenteret med billeder af naturlige scener, hvis fraktale dimension har værdien 2.5. I denne artikel hævder Field et al. endvidere, at Field i [Fie87] fandt, at den fraktale dimension af de benyttede seks billeder var 3. Jeg har ved nærmere gennemlæsning af [Fie87] fundet, at dette ikke er korrekt. I [RB94] har Bialek og Ruderman undersøgt de statistiske egenskaber af et stort antal billeder taget i en skov. De finder her, at den fraktale dimension er  $2.5 + \frac{\eta}{2}$ , hvor  $\eta = 0.19 \pm 0.01$ . I [Pen84, Vos85] forsøger Pentland og Voss at skabe billeder af kunstigt skabte naturlige scener ud fra den idé, at billeder af naturlige scener er intensitetsflader med en fraktal dimension. De eksperimenterer begge med at benytte de, af Mandelbrot og van Ness [MvN68] døbte, fraktionelle Brownske bevægelser, som er funktioner med en fraktal dimension som model for billeder af naturlige scener. Et 2-dimensionelt billede skabt af en fraktionel Brownsk bevægelse har a priori en fraktal dimension mellem 2 og 3. Pentland og Voss laver i deres artikler overbevisende kunstige bjerge, månelandskaber og skyer ved hjælp af fraktionelle Brownske bevægelser.

I digital billedbehandling er feature-detektion og segmentering to vigtige områder, hvor man forsøger at lokalisere objekter i billeder. Det har vist sig i visse tilfælde at være nyttigt, at betragte et givet billede på forskellige skalaer. Man kan ved hjælp af denne metode nedtone støj, uinteressante detaljer og diskretiserings effekter i det betragtede billede. Ofte udvælger man en bestemt skala og benytter derpå forskellige differentialudtryk, som feature-detektorer. For at kunne udnytte denne såkaldte skala-selektionsmetode til feature-detektion, er det nødvendigt, at man kan genfinde objekter i det originale billede fundet på en højere skala. Det er derfor vigtigt, at kunne sammenligne billedafledte fra forskellige skalaer. Dette kræver, at de billedafledte er blevet skala-normaliseret. Lindeberg har blandt andet beskæftiget sig med dette problem, [Lin94, Lin96a, Lin96b]. Han fremsætter i disse artikler et skala-normaliseringsprincip, som afhænger af, hvilken type struktur man ønsker at detektere. Han kalder dette princip for  $\gamma$ -parametriserede normaliserede afledte, hvor  $\gamma$  er en empirisk bestemt parameter. Denne parameter har Lindeberg bestemt for en række features, såsom kanter, hjørner og det han kalder blobs, som kort fortalt er samlinger af billedpunkter, hvis intensitetsværdier er tæt på hinanden.

Jeg vil i denne rapport bygge videre på Lindebergs skala-normaliseringsprincip ved at opstille og afprøve en hypotese omhandlende normalisering af billedafledte på forskellig skala ved hjælp af kendskab til den fraktale dimension af billedet, under antagelse af at billedets intensitetsflade er en fraktionel Brownsk bevægelse. For at fremlægge denne hypotese er det nødvendigt at klarlægge en række teoretiske begreber om fraktionelle Brownske bevægelser og teorien for lineære skalarum. Dette gøres i afsnit 3 og 4, og hypotesen fremlægges i afsnit 5. Hypotesens gyldighed efterprøves i praksis i afsnit 6. I konklusionen afsnit 7 diskuteres valget af fraktionelle Brownske bevægelser som model for billeder af naturlige scener. Alle de i rapporten benyttede programmer jeg selv har implementeret, er skrevet til matematiksystemet Matlab, da jeg ønsker at fokusere på teorien og ikke på selve implementeringen.

### 3 Fraktionelle Brownske bevægelser

I dette afsnit vil jeg forklare, hvad en fraktionel Brownsk bevægelse er intuitivt og matematisk. Jeg vil ligeledes godtgøre, at man kan betragte intensitetsfladen af et billede, som en fraktionel Brownsk flade, fremkommet ved en fraktionel Brownsk bevægelse. For at hjælpe forståelsen forklarer jeg kort, hvad en fraktal er, og ydermere hvad der menes ved den fraktale dimension, og hvad sammenhængen mellem denne og fraktionelle Brownske bevægelser er. Til slut vil jeg fremlægge Mandelbrot og van Ness' [MvN68] resultat, der omhandler en egenskab ved frekvensspektret af en fraktionel Brownsk bevægelse.

Den klassiske Brownske bevægelse blev opdaget af botanisten R. Brown i det 19. århundrede, da han undersøgte pollenkorns bevægelse i væske. Han fandt at disse korn tilsyneladende bevægede sig tilfældigt, hvilket skyldes at de enkelte korn støder ind i væskens molekyler, [BM89]. Sandsynlighedsfordelingen for at et pollenkorn bevæger sig en vis afstand fra et udgangspunkt inden den støder ind i et molekyle, er givet ved Gaussfordelingen. Endvidere gælder der at alle retninger er "lige gode", dvs. der er lige stor sandsynlighed for bevægelse i alle retninger. Det var Albert Einstein der i 1905 formaliserede denne forklaring. Den matematiske definition af den Brownske bevægelse følger her, [Hsu97].

**Definition 1 (Brownske bevægelser):** *En stokastisk proces  $\{B(t), t \geq 0\}$  kaldes en*

*Brownsk bevægelse, hvis den har følgende egenskaber:*

1. *Processen  $B(t)$  har et stationært uafhængigt inkrement  $B(t) - B(t_0)$ .*
2. *Inkrementet  $B(t) - B(t_0)$ ,  $t > t_0$  har en Gaussisk sandsynlighedsfordeling.*
3.  $E[B(t)] = 0$ .
4.  $B(0) = 0$ .

*Hvor  $E[B(t)]$  er middelværdien af  $B(t)$ .*

Den Brownske bevægelse kaldes også en Wiener-proces. Det gælder altså generelt at inkrementet af en Brownsk bevægelse er Gaussfordelt, dvs. har en fordeling som er givet ved Gauss-funktionen, og derfor kaldes denne proces også en Gaussisk proces. Variansen  $\text{Var}$  af en Brownsk bevægelse  $B(t)$  er,

$$\text{Var}[B(t)] = \sigma^2 t,$$

hvor  $\sigma^2$  er en parameter for den Brownske bevægelse. Hvis  $\sigma^2 = 1$ , så kaldes processen  $B(t)$  en standard Brownsk bevægelse. Variansen af inkrementet af en Brownsk bevægelse er givet ved,

$$\text{Var}[B(t_2) - B(t_1)] = \sigma^2 |t_2 - t_1|.$$

Det er, som nævnt i indledningen til dette afsnit, givtigt at forklare, hvad det vil sige, at en mængde er fraktal, før vi går videre til at definere den fraktionelle Brownske bevægelse. For at gøre dette er det nødvendigt at klarlægge betydningen af *dimensionen af en mængde*. Man kan for en vilkårlig mængde definere en dimension, som beskriver mængdens udbredelse i dennes domæne. Denne udbredelse kan beskrives intuitivt ved hjælp af et måleinstrument  $\lambda$ , med hvilket man opmåler mængden og tæller hvor mange gange  $\lambda$  kan være på mængden. Den metriske egenskab  $M$  (længde, areal, volumen ...) man ønsker opmålt er da givet ved

$$M = n\lambda^D,$$

hvor  $n$  er antallet af gange man bruger  $\lambda$  på den betragtede mængde og  $D$  er den topologiske dimension af måleinstrumentet  $\lambda$ . For at estimatet af  $M$  skal være konsistent<sup>1</sup> over skala (størrelse af  $\lambda$ ) er det nødvendigt, at  $D$  også er dimensionen af den betragtede mængde. De enkleste eksempler på dimensionen af en mængde er dimensionen af geometriske objekter. Mængden der består af et enkelt punkt har som bekendt dimensionen nul, da et punkt ikke har nogen udbredelse. Mængden bestående af alle punkter på en linje har dimensionen 1 osv.. På figur 1 ses eksempler på mængder i et 2-dimensionelt domæne.

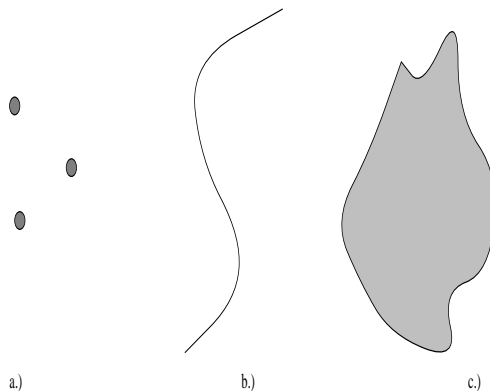
Der findes en række matematiske definitioner af dimensionen af en mængde, [Ott93, side 69–103]. Den vigtigste af disse definitioner er for denne rapport Hausdorff-dimensionen. For at kunne fremlægge denne definition er det nødvendigt at have defineret diameteren af en mængde.

**Definition 2 (Diameter af en mængde):** *Lad  $A$  være en mængde af punkter i et  $N$ -dimensionelt metrisk rum. Diameteren af  $A$ , defineres som den største afstand mellem to punkter  $x$  og  $y$  i lukningen af  $A$ ,  $\overline{A} = A \cup \partial A$  (hvor  $\partial A$  er randen af  $A$ ). Dvs. diameteren af  $A$ ,  $|A|$ , er givet ved,*

$$|A| = \sup_{x,y \in A} |x - y|.$$

---

<sup>1</sup>Dvs. ikke afvigende over skala, således at estimatet af  $M$  bliver bedre på finere skalaer.



Figur 1: På figuren skitseres tre eksempler på mængder i et 2-dimensionelt domæne. a.) skitserer en mængde med dimension 0 bestående af 4 punkter, b.) skitserer en 1-dimensionel mængde og c.) skitserer en 2-dimensionel mængde.

I sin fremlægning af Hausdorff-dimensionen indfører Ott begreberne Hausdorff-målet og kvaliteten af Hausdorff-målet. Disse to begreber er defineret nedenfor, men den intuitive forståelse er ikke klar ud fra disse definitioner. Hausdorff-målet er en generalisering af de metriske egenskaber, såsom den totale længde, areal og volumen af den betragtede mængde. Kvaliteten af Hausdorff-målet kan betragtes som en indikator for opløsningen eller som størrelsen af måleinstrumentet, hvormed man ønsker at finde Hausdorff-målet. Følgende definition er en omskrivning af Ott's udlægning.

**Definition 3 (Hausdorff-dimensionen):** *Betragt en mængde  $A$  af punkter i et  $N$ -dimensionelt metrisk rum. Lad  $S$  være en tællelig samling af delmængder af  $A$ , således at diameteren  $\epsilon_i = |S_i|$  af delmængden  $S_i \in S$ ,  $i = 1, \dots, m$ , opfylder,*

$$0 < \epsilon_i \leq \delta.$$

*Lad der endvidere gælde at  $S$  dækker  $A$ , dvs.  $A \subset \bigcup_i S_i$ . Den  $d$ -dimensionelle kvalitet  $\Gamma_d(\delta)$  af Hausdorff-målet defineres til at være,*

$$\Gamma_d(\delta) \equiv \inf_{S \in M} \sum_{i=1}^m \epsilon_i^d,$$

*hvor  $M$  er mængden af alle mulige samlinger  $S$ . Det  $d$ -dimensionelle Hausdorff-mål defineres som*

$$\Gamma_d \equiv \lim_{\delta \rightarrow 0} \Gamma_d(\delta).$$

*Det kan vises, at der generelt findes en kritisk værdi  $D_H$  for  $d$ , hvorom der gælder, at hvis  $d < D_H$  så bliver Hausdorff-målet  $\Gamma_d = +\infty$ , og hvis  $d > D_H$  så bliver  $\Gamma_d = 0$ . For  $d = D_H$  kan  $\Gamma_d$  være nul,  $+\infty$  eller et positivt endeligt tal. Den kritiske værdi  $D_H$  kaldes for Hausdorff-dimensionen.*

For heltallige  $D_H$  er Hausdorff-dimensionen ækvivalent med det gængse dimensionsbegreb, dvs. at hvis man betragter en endelig flade i et 3-dimensionelt rum så er  $D_H = 2$  og endvidere angiver Hausdorff-målet  $\Gamma_{D_H}$  arealet af fladen. Ligeledes gælder der for linjer at  $D_H = 1$  og Hausdorff-målet  $\Gamma_{D_H}$  er længden af linjen. I tilfælde af en punktmængde er

$D_H = 0$ . Hausdorff-dimensionen er altid lig med eller større end den topologiske dimension af objektet. Dette lægger op til at definere hvad en fraktal mængde er.

**Definition 4 (Fraktale mængder):** *En mængde kaldes en fraktal, hvis den har en ikke-heltallig Hausdorff-dimension.*

Et par eksempler på naturlig forekommende approksimative fraktaler er bjergkæder, havbølger og kystlinjer, [Fie87, KFK90, Man82, RB94].

Vi har nu fået fastlagt de to begreber Brownske bevægelser og den fraktale dimension, vi kan derfor gå videre til at definere den fraktionelle Brownske bevægelse. I artiklen [MvN68], definerer forfatterne den 1-dimensionelle fraktionelle Brownske bevægelse, ud fra den ovenfor beskrevne Brownske bevægelse (Def. 1). Nedenfor ses de to forfatters definition.

**Definition 5 (Fraktionelle Brownske bevægelser):** *Hvis  $B(t)$  betegner en Brownsk bevægelse, lad da  $H$  være i intervallet  $0 < H < 1$ . Den stokastiske funktion  $B_H(t)$  kaldes en reduceret fraktionel Brownsk bevægelse med parameteren  $H$ . Denne funktion er defineret for  $t > 0$ , ved*

$$B_H(t) = \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \int_{-\infty}^t (t-s)^{H-1/2} dB(s)$$

og inkrementet er givet ved

$$B_H(t) - B_H(0) = \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \left\{ \int_{-\infty}^0 \left( (t-s)^{H-1/2} - (-s)^{H-1/2} \right) dB(s) + \int_0^t (t-s)^{H-1/2} dB(s) \right\},$$

hvor  $\Gamma(\cdot)$  er Gammafunktionen<sup>2</sup>. Integrationen over  $B(s)$  er en punktvis integration. Integrationen skal forstås således, at hvis  $B(s)$  havde været differentiabel, så kunne man substituere  $dB(s)$  med  $\frac{\partial B}{\partial s} ds$ .

For  $H = 1/2$  og  $B_H(0) = 0$  reducerer den fraktionelle Brownske bevægelse  $B_H(t)$  til den Brownske bevægelse  $B(t)$ . For alle andre værdier af  $H$ , kaldes  $B_H(t)$  for den fraktionelle afledte eller det fraktionelle integrale af  $B(t)$ . Man kan altså betragte  $B_H(t)$  som en  $n$ -ordens differentiation eller integration af  $B(t)$  med hensyn til  $t$ , hvor  $n = H - 1/2$  er ikke-heltalligt. Der gælder generelt, at når  $n = H - 1/2$  er heltallig, så bliver udtrykket for  $B_H(t)$  et integrale af  $B(t)$  gentaget  $n$  gange. I Mandelbrot og van Ness's artikel [MvN68] fremlægges en række argumenter<sup>3</sup> for valget af begrænsningen på  $H$ ,  $0 < H < 1$ . Man kan dog slække på kravet til  $H$ , således at  $H > 0$ . Dette krav er nødvendigt for at undgå singulariteter i udtrykket for  $B_H(t)$ . Mandelbrot og van Ness har ligeledes valgt at integrere over  $t$  fra  $-\infty$  til  $t$  for at fjerne vægten på  $t = 0$ .

I deres artikel fremhæver Mandelbrot og van Ness at den fraktionelle Brownske bevægelse er selv-similar. Dette betyder i ikke-matematiske termer at den fraktionelle Brownske bevægelse har samme sandsynlighedsfordeling på alle skalaer. Følgende definitioner og teorem er fra [MvN68], som giver den matematiske fastlæggelse af begrebet selv-similaritet.

<sup>2</sup>Se f.eks. [Spi92] for en definition af  $\Gamma$  funktionen.

<sup>3</sup>Se blandt andet artiklens proposition 3.7 og corollary 3.4.

**Definition 6 (Sammenligning af to stokastiske funktioner):** Notationen  $\{X(t)\} \triangleq \{Y(t)\}$  angiver at de to stokastiske funktioner  $X(t)$  og  $Y(t)$  har den samme sandsynlighedsfordelingsfunktion.

**Definition 7 (Selv-similaritet):** Inkremitter af den stokastiske funktion  $\{X(t); -\infty < t < \infty\}$  siges at være selv-similære med parameteren  $H \geq 0$ , hvis der, for et vilkårligt  $h > 0$  og et vilkårligt  $t_0$ , gælder

$$\{X(t_0 + \tau) - X(t_0)\} \triangleq \{h^{-H}[X(t_0 + h\tau) - X(t_0)]\}.$$

Tallet  $h$  er en skalerings parameter.

**Teorem 1 (Selv-similaritet af den fraktionelle Brownske bevægelse):** Den fraktionelle Brownske bevægelses inkremitter er stationære og selv-similære med parameteren  $H$ .

Mandelbrot og van Ness fremsætter et korollar i deres artikel, som jeg senere skal bruge til at udlede et resultat, så jeg indfører derfor dette korollar om standard-afvigelsen  $\sigma^2 = \text{Var}[B_H(t)]$  af den fraktionelle Brownske bevægelse  $B_H(t)$ , hvor  $\text{Var}[\cdot]$  angiver variansen.

**Korollar 1 (Potens-lov for inkrementet af  $B_H(t)$ ):** Man kan opskrive en potens-lov for standard-afvigelsen  $\sigma$  af inkrementet af den fraktionelle Brownske bevægelse  $B_H(t)$  på følgende måde,

$$\sigma^2(B_H(t+T) - B_H(t)) = E[(B_H(t+T) - B_H(t))^2] = T^{2H} V_H$$

hvor

$$V_H = [\Gamma(H + \frac{1}{2})]^{-2} \left\{ \int_{-\infty}^0 [(1-s)^{H-\frac{1}{2}} - (-s)^{H-\frac{1}{2}}]^2 ds + \frac{1}{2H} \right\}.$$

Jeg ønsker at udvide definitionen af fraktionelle Brownske bevægelser, således at disse bliver funktioner af  $N$ -dimensionelle vektorer  $\vec{x}$ . Hvis denne definition skal opskrives på integralform, som i Def. 5, er det nødvendigt at konstruere et integrale, som integrerer over alle mulige veje på den Brownske bevægelse, som findes op til det betragtede punkt  $\vec{x}$  på den fraktionelle Brownske bevægelse. Dette skyldes at den fraktionelle Brownske bevægelse, ifølge Def. 5, er defineret, som integration af den Brownske bevægelse. Dette er så vidt jeg ved ikke nogen let nød at knække. Jeg vælger derfor at benytte en definition af den  $N$ -dimensionelle fraktionelle Brownske bevægelse, som ikke er baseret på en integralform, men på en sandsynlighedsfordeling.

Pentland [Pen84] generaliserer i sin artikel fraktionelle Brownske bevægelser til også at omfatte 2D og 3D funktioner. Jeg udbygger hans definition til  $N$ -dimensionelle billeder.

**Definition 8 ( $N$ -dimensionelle fraktionelle Brownske bevægelser):** En funktion  $f_H(\vec{x})$  af en  $N$ -dimensionel vektor  $\vec{x}$  er en  $N$ -dimensionel fraktionel Brownsk bevægelse, hvis der for alle  $\vec{x}$  og  $\vec{\lambda}$  gælder

$$P \left( \frac{f_H(\vec{x} + \vec{\lambda}) - f_H(\vec{x})}{\|\vec{\lambda}\|^H} < y \right) = F(y),$$

hvor  $F(y)$  er en kummulativ sandsynlighedsfordeling og  $P$  angiver sandsynligheden. Den  $N$ -dimensionelle fraktionelle Brownske bevægelse kaldes også for den  $N$ -dimensionelle fraktionelle Brownske flade.

I Mandelbrot og van Ness's [MvN68] definition, Definition 5, er den fraktionelle Brownske bevægelse Gaussisk fordelt, da den er defineret som den fraktionelle integration af den Brownske bevægelse, hvis inkremitter er Gaussisk fordelt, Definition 1. Definition 8 er mere generel og giver mulighed for at den fraktionelle Brownske bevægelse har en anden sandsynlighedsfordeling  $F(y)$ . Der er i litteraturen belæg for at billeder af naturlige scener har en ikke-Gaussisk fordeling. Bialek og Ruderman [RB94] fremhæver i deres artikel at deres skov-billeder har en ikke-Gaussisk fordeling.

Nedenstående bemærkning gælder for den Gaussiske fraktionelle Brownske bevægelse.

**Bemærkning 1 ( $N$ -dimensionelle fraktionelle Brownske bevægelser):** *En  $N$ -dimensionel funktion  $f_H(\vec{x})$  er en  $N$ -dimensionel fraktionel Brownsk bevægelse, hvis der for  $f_H(\vec{x})$  gælder, at hvis vi tager et skridt  $\vec{\lambda}$  ud fra et vilkårligt punkt  $\vec{x}_0$ , så er standard afvigelsen  $\sigma$  af inkrementet*

$$\sigma[f_H(\vec{x}_0 + \vec{\lambda}) - f_H(\vec{x}_0)] = K \cdot |\vec{\lambda}|^H,$$

hvor  $K$  er en positiv konstant. Vi kan altså snitte en linje ud i den  $N$ -dimensionelle funktion i en vilkårlig retning og vil da få en 1-dimensionel fraktionel Brownsk bevægelse  $B_H(t)$ .

I artiklerne [MvN68, Pen84, Går87] omtales et for denne rapport meget centralt resultat, omhandlende 1-dimensionelle fraktionelle Brownske bevægelers spektraltæthed eller energi om man vil. Dette resultat kan sammenfattes til et teorem.

**Teorem 2 (Spektral-tæthedens proportionalitetsrelation):** *Der gælder følgende proportionalitetsrelation for den 1-dimensionelle fraktionelle Brownske bevægelses spektraltæthed,*

$$|\tilde{B}_H(\omega)|^2 \propto |\omega|^{-\alpha},$$

hvor  $\tilde{B}_H(\omega)$  er den Fouriertransformerede<sup>4</sup> af  $B_H(t)$  og  $\alpha = 2H + 1$ .

Beviset for dette teorem findes iflg. Pentland i en artikel af Barrow og Tenenbaum, [BT78].

Den spektrale tætheds proportionalitetsrelation er i Teorem 2 kun defineret for den 1-dimensionelle fraktionelle Brownske bevægelse, men jeg ønsker at definere denne proportionalitets relation for den  $N$ -dimensionelle fraktionelle Brownske flade  $f_H(\vec{x})$ . Dette er, inspireret af [Vos85], sammenfattet i følgende teorem.

**Teorem 3 (Den  $N$ -dim. proportionalitetsrelation):** *Der gælder følgende proportionalitetsrelation for den  $N$ -dimensionelle fraktionelle Brownske flades spektraltæthed,*

$$|\tilde{f}_H(\vec{\omega})|^2 \propto |\vec{\omega}|^{-\alpha},$$

hvor  $\tilde{f}_H(\vec{\omega})$  er den Fouriertransformerede af  $f_H(\vec{x})$  og  $\alpha = 2H + 1$ .

Beviset for dette teorem bygger på det faktum at den  $N$ -dimensionelle Fouriertransformation er separabel, dvs. at Fouriertransformationen forløber ved først at transformere i den ene retning for derpå at transformere i en anden retning osv., og rækkefølgen af retningerne er ligegyldig. I beviset for ovenstående teorem benytter man denne egenskab og at et hvert snit i en  $N$ -dimensionel fraktionel Brownsk flade også er en 1-dimensionel fraktionel Brownsk flade. Jeg undlader dog at bevise dette teorem.

<sup>4</sup>Fouriertransformationen af  $f(\vec{x})$  er givet ved  $\tilde{f}(\vec{\omega}) = \int_{\vec{x} \in \mathbb{R}^N} f(\vec{x}) e^{-i2\pi \vec{x} \cdot \vec{\omega}} d\vec{x}$ , hvor  $\vec{\omega} \in \mathbb{R}^N$ , se [Bri88].

Lindeberg [Lin94] viser i denne artikel, at hvis man antager at spektraltætheden af  $N$ -dimensionelle billeder  $L(\vec{x})$  af naturlige scener indeholder den samme mængde energi for alle frekvenser, så vil spektraltætheden opfylde følgende proportionalitetsrelation,

$$|\tilde{L}(\vec{\omega})|^2 \propto |\vec{\omega}|^{-N}.$$

Hvis man antager at billeder af naturlige scener kan modelleres ved hjælp af fraktionelle Brownske bevægelser, så holder denne energi-betragtning kun for 2-dimensionelle billeder når  $\alpha = 2$ , dvs. når  $H = 1/2$  og billedet er en klassisk Brownsk bevægelse. Dette betyder, at for andre værdier af  $\alpha$  gælder der altså ikke, at spektraltætheden indeholder den samme mængde energi for alle frekvenser.

Teorem 2–3 har en central rolle i afsnit 5, hvor de bliver brugt i udledningen af denne rapport's hypotese.

I artiklerne [Pen84, Går87, Vos85] fremhæves det at der er en relation mellem parameteren  $H$  i den fraktionelle Brownske bevægelse  $f_H(\vec{x})$  og Hausdorff dimensionen<sup>5</sup>  $D_H$ . Denne relation er sammenfattet i følgende teorem.

**Teorem 4 (Hausdorff dimensionen af den fraktionelle Brownske bevægelse):** *Hausdorff-dimensionen  $D_H$  af den fraktionelle Brownske bevægelse  $f_H(\vec{x})$  er givet ved,*

$$D_H = N + (1 - H),$$

hvor  $N$  er den topologiske dimension af vektoren  $\vec{x}$ .

**Bevis:** Betragt den  $N$ -dimensionelle fraktionelle Brownske flade  $f_H(\vec{x})$  som en mængde i et  $(N + 1)$ -dimensionelt rum. Ifølge Definition 3 skal vi overdække denne mængde med en række delmængder for at finde Hausdorff-dimensionen af  $f_H(\vec{x})$ . Vi vælger derfor at overdække denne mængde med  $(N + 1)$ -dimensionelle bokse. De  $N$  sider af disse bokse har længden  $\epsilon$  og den sidste side har ifølge Korollar 1 længden  $\frac{s[f_H(\vec{\lambda}) - f_H(0)]}{\epsilon} = \epsilon^{H-1}$ , hvor  $\vec{\lambda}$  er en vektor med længden  $\|\vec{\lambda}\| = \sqrt{N} \epsilon$ . Der vil for ethvert  $\epsilon$  være

$$\left(\frac{1}{\epsilon}\right)^N \cdot \frac{s[f_H(\vec{\lambda}) - f_H(0)]}{\epsilon} = \epsilon^{H-1} \cdot \epsilon^{-N} = \epsilon^{H-(N+1)}$$

bokse med ovennævnte sidelængder. Derfor er kvaliteten af Hausdorff-målet

$$\Gamma_d(\delta) \leq \sum_{i=1}^m \epsilon^d \cdot \epsilon^{H-(N+1)} = m \cdot \epsilon^{d+H-(N+1)},$$

hvor  $0 < \epsilon \leq \delta$ . Vi vælger nu  $\delta = \epsilon$  og får så at Hausdorff-målet bliver,

$$\Gamma_d = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Gamma_d(\epsilon) = m \cdot \epsilon^{d+H-(N+1)}.$$

For at finde Hausdorff-dimensionen  $D_H$  skal  $\Gamma_d$  ifølge Def. 3 være en konstant, dvs.

$$\Gamma_d \propto \epsilon^0.$$

---

<sup>5</sup>  $H$ 'et i  $D_H$  må ikke forveksles med parameteren  $H$  i den fraktionelle Brownske bevægelse  $f_H(\vec{x})$ .



Vi kan derfor opstille følgende ligning,

$$d + H - (N + 1) = 0 \Leftrightarrow d = (N + 1) - H.$$

Hausdorff-dimensionen af en  $N$ -dimensionel fraktionel Brownsk bevægelse er derfor, iflg. Def 3,  $D_H = d = N + (1 - H)$ .  $\square$

Jeg finder det beventdt også at opskrive Hausdorff-dimensionen af den fraktionelle Brownske bevægelse, som en funktion af  $\alpha$  fra Teorem 3. Dette teorem er inspireret af Voss, [Vos85].

**Teorem 5 (Relation mellem Hausdorff-dimensionen og  $\alpha$ ):** *Der gælder følgende relation mellem Hausdorff-dimensionen  $D_H$  af den fraktionelle Brownske bevægelse og  $\alpha$  defineret i Teorem 3,*

$$D_H = N + \frac{3 - \alpha}{2}.$$

**Bevis:** Beviset for dette teorem er ganske enkelt. Fra Teorem 3 har vi følgende relation,

$$\alpha = 2H + 1 \Leftrightarrow H = \frac{\alpha - 1}{2}.$$

Indsættes dette i udtrykket fra Teorem 4, fås følgende

$$D_H = N + 1 - H = N + 1 - \frac{\alpha - 1}{2} = N + \frac{3 - \alpha}{2}.$$

$\square$

Det er her værd at bemærke, at hvis man benytter fraktionelle Brownske bevægelser som model for billeder af naturlige scener, og antager at den fraktale dimension af virkelige billeder af naturlige scener er  $D_H = 2.5$ , så er  $H = 1/2$ , hvilket betyder at sådanne billeder kan modelleres af den klassiske Brownske bevægelse.

Pentland bemærker at man kan benytte Teorem 3 og ovenstående Teorem 4 til at finde den fraktale dimension af en funktion. Denne ide har Gårding taget op i artiklen [Går87] og jeg benytter hans metoder i afsnit 6 til at generere kunstige billeder med en bestemt fraktal dimension.

I [MvN68] viser Mandelbrot og van Ness at 1-dimensionelle fraktionelle Brownske bevægelser ikke er differentiable. Dette gøres med følgende teorem.

**Teorem 6 (Fraktionelle Brownske bevægelers manglende differentiability):** *Den 1-dimensionelle fraktionelle Brownske bevægelse  $B_H(t)$  er næsten ikke differentiable. Faktisk er*

$$\limsup_{t \rightarrow t_0} \left| \frac{B_H(t) - B_H(t_0)}{t - t_0} \right| = \infty$$

*med sandsynligheden en.*

Dette resultat kan udvides til at gælde for  $N$ -dimensionelle fraktionelle Brownske bevægelser  $f_H(\vec{x})$ , ved at betragte værdierne af  $f_H(\vec{x})$  i  $\vec{x}_0$  og  $\vec{x}_0 + \vec{\lambda}$  når  $|\vec{\lambda}| \rightarrow 0$ . Jeg undlader at opstille og bevise dette teorem, da det ikke er nødvendigt for sammenhængen i denne rapport. Mandelbrot og van Ness bemærker at denne mangel på differentiability kan omgås, ved at udglatte den fraktionelle Brownske bevægelse. Dette gøres ved at folde denne med en

funktion. I næste afsnit af denne rapport gennemgås noget af teorien bag lineære skalarum, som blandt andet benytter sig af udglatning af billeder ved at folde dette med en Gauss-funktion, og derved opnås at billedet bliver klasse  $C^\infty$  differentiabelt. Hvis vi benytter lineære skalarum i billedebehandling kan vi altså sagtens antage, at billedet er en fraktionel Brownsk bevægelse, og samtidig bibeholde muligheden for at differentiere billedet.

Pentland og Gårding er i deres artikler [Pen84, Går87] begge interesserede i den fraktale dimensions anvendelse indenfor billedbehandling. Man betragter, som bekendt billeder som intensitetsfunktioner  $I(\vec{x})$ , hvilket indebærer at f.eks. 2D-billeder kan betragtes som intensitetsflader  $I(x, y)$  i et 3-dimensionelt rum. Pentland arbejder med ideen om at skabe kunstige billeder af naturlige objekter som f.eks. bjergkæder, ved hjælp af fraktionelle Brownske intensitetsflader. Det har nemlig vist sig at mange billeder af naturlige objekter er approksimative fraktaler, [RB94, Fie87, KFK90], dvs. at disse billeder i et vist skala-interval har de samme egenskaber som en fraktal mængde. Pentland mener endvidere, at man kan opbygge en generel beskrivelse af naturlige objekter, således at billedanalyse af naturlige objekter bliver styrket. Gårding tager tråden op efter Pentland og benytter ideen om at mange naturlige objekter er fraktale til at lave tekstur-analyse og segmentering.

Jeg vil i det følgende bygge videre på Pentland og Gårding's ideer og fremstille en hypotese om normalisering over skala af diskrete billede afledte, ved hjælp af det i Teorem 3 beskrevne  $\alpha$ , samt dimensionen af billedet og ordenen af differentiation.

## 4 Lineært skalarum

Jeg vil i dette afsnit kort fremlægge den del af teorien om lineær skalarum, som er nødvendig i denne rapport for at forstå normaliseringsbegrebet. Jeg lægger ud med en kort gennemgang af ideen bag skalarum og fremlægger derpå det teoretiske grundlag. Tilsidst gennemgår jeg normalisering af billedafledte over skala i forbindelse med automatisk skala-selektion.

I den fysiske verden eksisterer objekter på forskellige skalaer. Hvis man for eksempel betragter et træ, kan man vælge at se bladene og grenene der udgør trækronen, eller man kan vælge, at betragte træets overordnede kontur, stammen og kronen. Man kan altså vælge at betragte et objekt på forskellige detaljeringsgrader eller skalaer. Man har forsøgt at fange dette generelle princip i teorien for lineært skalarum. I digital billedbehandling benytter man teorien for lineært skalarum til blandt andet feature-detektion, da denne teori muliggør en nedtoning af støj og uønskede detaljer i det betragtede diskrete billede. Følgende betragtninger er hentet fra en tutorial skrevet af ter Haar Romeny [tHR96].

Digitale billeder er som bekendt diskrete datasæt, som ofte er skabt ved hjælp af en form for måleinstrument, for eksempel et digitalt kamera. Et måleinstrument har altid en måleenhed som bestemmer opløsningen af datasættet, dvs. pixel-størrelsen. Måleinstrumentet har endvidere en ydre og indre grænse for detaljeringsgraden af det målte datasæt. Den indre grænse udgøres af måleinstrumentets mindste måleenhed, og den ydre grænse afgøres af måleinstrumentets største måleenhed eller synsfelt, dvs. at den ydre grænse for f.eks. et kamera, er det udsnit af de betragtede objekter som man kan se igennem kameranlinsen. Hvis måleinstrumentet er et kamera, så er måleenheden kameraets detaljegrade eller skala, angivet ved kameraets blændeåbning også kaldet apertur.

I teorien for lineært skalarum ønsker man at modellere en apertur. Matematisk kan en apertur betragtes som en operator eller funktion der producerer det diskrete billede. ter

Haar Romeny citerer Florack et al. [FtHRKV94] for at opstille fem krav til en apertur-funktion:

- Linearitet.
- Rumlig translations-invarians.
- Isotropi.
- Skala-invarians.
- Separabilitet.

Disse krav afspejler at man ønsker en funktion, der ikke har nogle præferencer med hensyn til orientering og position, endvidere vil man kræve at apertur-funktionen ikke skaber ny information i billedet, når størrelsen af aperturet (skalaen) stiger. Disse krav kan opfyldes, hvis man benytter følgende definition for et lineært skalarum af et billede.

**Definition 9 (Billeder i lineære skalarum):** *Det lineære skalarum af et billede  $L(\vec{x})$  er givet ved diffusionsligningen*

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \vec{\nabla}^2 L,$$

hvor  $\vec{\nabla}^2$  er Laplace-operatoren<sup>6</sup> og  $t$  er skalavariablen. Løsninger til diffusionsligningen giver et udtryk for billedet på en bestemt skala  $L(\vec{x}, t)$ .

Gauss-funktionen er diffusionsligningens Green-funktion, hvilket betyder at Gauss-funktionen er "frembringer" for en løsning til diffusionsligningen. Dette giver anledning til følgende definition.

**Definition 10 (Løsninger til diffusionsligningen):** *En løsning til diffusionsligningen og dermed et billede  $L(\vec{x}, t)$  i skalarummet er givet ved*

$$L(\vec{x}, t) = G(\vec{x}, t) *_{\vec{x}} L(\vec{x}),$$

hvor  $*_{\vec{x}}$  betyder foldning<sup>7</sup> af de to funktioner i  $\vec{x}$  og Gauss-funktionen  $G(\vec{x}, t)$  er givet ved

$$G(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}^D} \exp\left(-\frac{|\vec{x}|^2}{2t}\right)$$

hvor  $D$  er dimensionen af  $\vec{x}$  og  $t = \sigma^2$  er variansen af Gauss-funktionen. Parameteren  $t$  kan betragtes som skalaen eller størrelsen af aperturet.

Der gælder endvidere, at Gauss-funktionens afledte også er løsninger til diffusionsligningen, og derfor gælder at den  $n$ 'te afledte i  $x_i$  af et billede i skalarum er givet ved,

$$\frac{\partial^n}{\partial x_i^n} (G(\vec{x}, t) *_{\vec{x}} L(\vec{x})) = \frac{\partial^n G(\vec{x}, t)}{\partial x_i^n} *_{\vec{x}} L(\vec{x}),$$

<sup>6</sup>Laplace-operatoren brugt på en funktion  $\varphi(x, y, z)$  er givet ved følgende udtryk  $\vec{\nabla}^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$ .

<sup>7</sup>Foldning af to funktioner  $g(\vec{x})$  og  $f(\vec{x})$  i  $\vec{x}$  er givet ved,  $g(\vec{x}) *_{\vec{x}} f(\vec{x}) = \int_{\vec{x}' \in \mathbb{R}^N} g(\vec{x}') f(\vec{x} - \vec{x}') d\vec{x}'$ , hvor  $N$  er dimensionen af  $\vec{x}$ .

hvor  $x_i, i = 1, \dots, N$  er det  $i$ 'te element i den  $N$ -dimensionelle vektor  $\vec{x}$ . Gauss-funktionens Fouriertransformerede er givet ved

$$\tilde{G}(\vec{\omega}, t) = \exp\left(-\frac{1}{2}t|\vec{\omega}|^2\right),$$

og i Fourier-domænet er den  $n$ 'te afledte af Gauss-funktionen i det  $i$ 'te element af vektoren  $\vec{\omega}$  givet ved

$$\frac{\partial^n \tilde{G}(\vec{\omega}, t)}{\partial \omega_i^n} = (j\omega_i)^n \tilde{G}(\vec{\omega}, t),$$

hvor  $j = \sqrt{-1}$ .

Tensorer er et vigtigt redskab i skalarumsteori, da de muliggør koordinat-invariante operationer på billeder. Jeg har valgt at omtale tensorer på dette sted i rapporten, idet jeg i afsnit 5 benytter tensornotation. Følgende er en sammenfatning af ter Haar Romeny's artikel [tHR96] og Merzbacher's lærebog i kvantemekanik [Mer70].

En tensor kan betragtes som en liste af lister eller en mængde af  $n$  operatører, og man taler om en  $n$ -tensor. Som eksempler kan nævnes at en 1-tensor er en vektor og en 2-tensor er en matrix. De  $n$  operatører i  $n$ -tensoren  $T$  indiceres  $T_i, 1 \leq i \leq n$ , endvidere gælder der at man kan kombinere indices, således at  $T_{ij}$  betyder at man først benytter tensoren  $T_i$  efterfulgt af  $T_j$ . Nedenfor ses to eksempler på tensorer. Tensoren for gradienten af et billede  $\vec{\nabla}L(x, y, z)$  er i 3-dimensioner givet ved 1-tensoren  $L_i$ ,

$$L_i = \left\{ \frac{\partial L}{\partial x}, \frac{\partial L}{\partial y}, \frac{\partial L}{\partial z} \right\} = \{L_x, L_y, L_z\}, i = x, y, z.$$

Laplace-operatoren er i 3-dimensioner givet ved hjælp af Einsteins summationskonvention<sup>8</sup>,

$$L_{ii} = \sum_{i=x,y,z} L_{ii} = L_{xx} + L_{yy} + L_{zz},$$

hvor  $L_{xx} = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}$  og tilsvarende for  $y$  og  $z$ . Denne operator har den egenskab at den er invariant overfor afstandsbevarende koordinattransformationer.

Der kan frembringes en lang række invarianter af denne type. Et resultat fra differential geometrien fortæller, at enhver invariant kan udtrykkes i et polynomium af en mængde af irreducible<sup>9</sup> invarianter. Denne mængde er som regel lille, for eksempel udgør følgende tensorer denne mængde for 2-dimensioner op til differentiationsordenen 2,

$$L, L_i L_i, L_{ii}, L_i L_{ij} L_j, L_{ij} L_{ji}.$$

Hvis man kender denne mængde af irreducible invarianter, kan man beregne alle invarianter for et skalarums billede for en given skala op til differentiationsordenen 2. Det er derfor interessant at betragte disse koordinat-invarianters udvikling over skala. Den information man får ud af dette bruges blandt andet til at finde features i billeder.

<sup>8</sup>Einsteins summationskonvention for tensor notation er at alle tensorer med ens indeks skal summeres, dvs. at i 2-D er  $L_i L_i = L_x L_x + L_y L_y$ .

<sup>9</sup>Irreducibilitet er et kompliceret koncept, som jeg vil undlade at forklare i denne rapport, og istedet henvise interesserede til Merzbacher's bog [Mer70] for en forklaring.

Ikke-lineære kombinationer af billedafledte, kaldet feature-styrkemål, benyttes som feature-detektorer, [Mar82]. Disse feature-styrkemål er også blevet benyttet til feature-detektion i skalarum, [Koe84, FtHRKV94, Lin94]. Man udnytter her at features er nemmere at detektere når der er mindre mængder af støj i billedet, dvs. på en højere indre skala end det oprindelige billede. Et problem er her at på højre skala forskydes features fra deres oprindelige position i billedet på grund af udglatningen ved foldning med Gauss-funktionen. Det er derfor nødvendigt at lokalisere featuren i det oprindelige billede, ved at følge den ned igennem skalarummet. Dette er ikke trivielt og ligger udenfor denne rapports rammer, så jeg vil undlade at behandle dette emne dybere.

Et andet problem der opstår ved feature detektion i skalarum er at finde den bedst egnede skala for detektion. Lindeberg [Lin94, Lin96a, Lin96b] har eksperimenteret med at benytte maxima af normaliserede feature-styrkemål over skala, som automatisk skalaselektor. En normalisering af skalabillederne er derfor nødvendig for at kunne sammenligne billedafledte over skala, [Lin94]. Man kan ved hjælp af almindelig dimensionsanalyse opstille følgende normalisering af den  $n$ 'te ordens afledte i  $x_i$  af billedet,

$$\partial_{x_i, norm}^n = t^{n/2} \partial_{x_i}^n, \quad (1)$$

hvor  $t$  angiver skalaen.

Lindeberg [Lin94, Lin96a, Lin96b] foreslår en udvidelse af denne normalisering, som giver en afhængighed af, hvilken type feature man ønsker at detektere. Han indfører de såkaldte  $\gamma$ -normaliserede afledte, som er givet ved

$$\partial_{x_i, \gamma_n - norm}^n = t^{\gamma_n/2} \partial_{x_i}^n, \quad (2)$$

hvor  $\gamma_n = n\gamma$  og  $\gamma$  er en empirisk bestemt normaliseringsparameter som skal tilpasses til den feature man ønsker at finde.

Jeg vil i det efterfølgende afsnit forsøge at finde et udtryk for  $\gamma_n$ , således at denne parameter afhænger af den fraktale dimension af billedet, den topologiske dimension af billedet og differentiationsordenen.

## 5 Hypotese

I dette afsnit vil jeg opstille fire teoremer omhandlende normalisering af billedafledte i skalarum. Jeg vil ved hvert teorem godtgøre dets gyldighed, ved at foretage en række udledninger ved hjælp af resultater fra de foregående afsnit. Disse udledninger er inspireret af nogle lignende overvejelser som Tony Lindeberg, [Lin94], har gjort sig. Disse teoremer danner rammen for min hypotese, som jeg fremlægger til sidst i dette afsnit.

De fire teoremer udtaler sig alle om normalisering af skalarums billeder  $L(\vec{x}; t)$ . I alle teoremerne benyttes  $L_2$ -normen af billedet til at udlede et normaliseringsudtryk. Valget af  $L_2$ -normen skyldes at udledningerne af teoremerne er mulige for denne normalisering, hvorimod udledningerne vil blive meget komplekse eller uløselige ved brugen af den generelle  $L_p$ -norm. Endvidere antages det i alle teoremer at de betragtede billeder er fraktionelle Brownske intensitetsflader.

I det første teorem betragtes et 1-dimensionelt billede  $f_\alpha(x)$  og det tilhørende Fouriertransformerede billede  $\hat{f}_\alpha(\omega)$ . Det antages at dette billede er en fraktionel Brownsk bevægelse. Der gælder da, den i Teorem 3 omtalte relation,  $|\hat{f}_\alpha|^2 \propto |\omega|^{-\alpha}$ . Jeg konstruerer

et skalarumbillede  $L(x; t)$  af signalet  $f_\alpha(x)$  ved, som omtalt i afsnit 4, at folde dette med Gauss-funktionen  $G(x; t)$ ,

$$L(x; t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x'; t) f_\alpha(x - x') dx'$$

og Fouriertransformationen af  $L(x; t)$  er derfor givet ved,

$$\tilde{L}(\omega; t) = \tilde{G}(\omega; t) \tilde{f}_\alpha(\omega).$$

**Teorem 7** *Et 1-dimensionelt skalarums billede  $L(x; t)$  kan  $L_2$ -norms normaliseres ved hjælp af følgende udtryk,*

$$L_{norm}(x; t) = \left( t^{-\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} L(x; t).$$

**Bevis:** Jeg vil finde  $L_2$ -normen af billedet  $L(x; t)$  ved,

$$\|L\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |L|^2 dx.$$

Jeg kan omskrive dette udtryk ved hjælp af Parsevals sætning, således at

$$\|L\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |L|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{L}|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{G}(\omega; t) \tilde{f}_\alpha(\omega)|^2 d\omega.$$

Da  $\tilde{G}(\omega; t) = e^{-\frac{1}{2}\omega^2 t}$  og ved at benytte resultatet  $|\tilde{f}_\alpha(\omega)|^2 = |\omega|^{-\alpha}$  kan jeg omskrive ovenstående til

$$\int_{-\infty}^{\infty} |e^{-\frac{1}{2}\omega^2 t}|^2 |\tilde{f}_\alpha(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2 t} |\omega|^{-\alpha} d\omega.$$

Jeg benytter nu, at ifølge [Lin94] gælder der at

$$\int_0^{\infty} x^m e^{-ax^2} dx = \frac{\Gamma((m+1)/2)}{2a^{(m+1)/2}}, \quad (3)$$

og endvidere gælder der at

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\omega|^{-\alpha} d\omega = 2 \int_0^{\infty} \omega^{-\alpha} d\omega, \quad (4)$$

således at ligningen for  $L_2$ -normen af  $L(x; t)$  kan omskrives til

$$\|L\|^2 = 2 \int_0^{\infty} e^{-\omega^2 t} \omega^{-\alpha} d\omega = \frac{\Gamma(-\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2})}{t^{-\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}}} = K \cdot t^{\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}},$$

hvor  $K$  er en konstant. □

Det ses at den i Teorem 7 foreslåede skala-normalisering, medfører at billedet skal normaliseres for 0'te ordens billedaffedte, dvs. billedet selv, i modsætning til den almindelige dimensionsanalyse-normalisering, se Ligning 1, og Lindebergs  $\gamma$ -normalisering, se Ligning 2. Det ses, at hvis teoremets normaliseringsmetode skal behandle 0'te ordens affedte som de to andre normaliseringsmetoder, så skal  $H = 0$ . Hvis billedet er en klassisk Brownsk bevægelse, dvs.  $H = 1/2$ , så skal det normaliseres med  $t^{-\frac{1}{4}}$ .

Jeg betragter nu det samme billede  $L(x; t)$ , men interesserer mig nu for  $L_2$ -normen af billedets  $n$ 'te ordens afledte. Lad  $L^{(n)}$  betegne billedet afledt  $n$  gange med hensyn til  $x$ ,  $\frac{\partial^n L}{\partial x^n}$ , hvilket i Fourier-domænet giver os

$$\tilde{L}^{(n)} = (i\omega)^n \tilde{G}(\omega; t) \tilde{f}_\alpha(\omega),$$

hvor  $i = \sqrt{-1}$ .

**Teorem 8** Ved  $L_2$ -norms normalisering af den  $n$ 'te ordens afledte af et 1-dimensionelt skalarumbillede  $L(x; t)$  kan man benytte følgende udtryk

$$L_{norm}^{(n)}(x; t) = \left(t^{-\frac{\alpha}{2} + n + \frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} L^{(n)}(x; t).$$

**Bevis:** Beviset for dette teorem følger det samme mønster som beviset ovenfor. Først findes  $L_2$ -normen af  $L^{(n)}(x; t)$ .

$$\begin{aligned} \|L^{(n)}\|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{L}^{(n)}|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |(i\omega)^n \tilde{G}(\omega; t) \tilde{f}_\alpha(\omega)|^2 d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |(i\omega)^n e^{-\frac{1}{2}\omega^2 t} \tilde{f}_\alpha(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |\omega|^{2n} e^{-\omega^2 t} |\omega|^{-\alpha} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2 t} |\omega|^{-\alpha + 2n} d\omega, \end{aligned}$$

hvor jeg benyttede at  $|i|^{2n} = 1$ . Ovenstående kan nu, ved hjælp af Ligning 3 og 4, omskrives til

$$\|L^{(n)}\|^2 = 2 \int_0^{\infty} e^{-\omega^2 t} \omega^{-\alpha + 2n} d\omega = \frac{\Gamma(-\frac{\alpha}{2} + n + \frac{1}{2})}{t^{-\frac{\alpha}{2} + n + \frac{1}{2}}} = K \cdot t^{\frac{\alpha}{2} - n - \frac{1}{2}},$$

hvor  $K$  er en konstant. □

Normaliseringen i Teorem 8 er konsistent med Teorem 7, idet at 0'te ordens billedafledte skal normaliseres. Det ses at  $n$ 'te ordens billedafledte håndteres ved at addere  $n$  til 0'te ordens normaliseringen, hvilket er konsistent med dimensionsanalyse-normaliseringen, se Ligning 1, og Lindebergs normalisering, se Ligning 2.

Jeg vil nu udvide problemet og betragte et  $N$ -dimensionelt signal, dvs.  $f_\alpha : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  og  $G, L : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , som antages at være en fraktionel Brownsk instensitetsflade. Jeg starter med at se bort fra afledte af  $L(\vec{x}; t)$ .

**Teorem 9** Ved  $L_2$ -norms normalisering af et  $N$ -dimensionelt skalarumbillede  $L(\vec{x}; t)$  kan man benytte følgende udtryk,

$$L_{norm}(\vec{x}; t) = \left(t^{-\alpha - \frac{N}{2} + \frac{N}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} L(\vec{x}; t).$$

**Bevis:** Jeg beregner  $L_2$ -normen af billedet,

$$\begin{aligned} \|L\|^2 &= \int_{\vec{x} \in \mathbb{R}^N} |L|^2 d\vec{x} = \int_{\vec{\omega} \in \mathbb{R}^N} |\tilde{L}|^2 d\vec{\omega} = \int_{\vec{\omega} \in \mathbb{R}^N} |\tilde{G}(\vec{\omega}; t) \tilde{f}_\alpha(\vec{\omega})|^2 d\vec{\omega} \\ &= \int_{\vec{\omega} \in \mathbb{R}^N} |e^{-\frac{1}{2}|\vec{\omega}|^2 t} \tilde{f}_\alpha(\vec{\omega})|^2 d\vec{\omega} = \int_{\vec{\omega} \in \mathbb{R}^N} e^{-|\vec{\omega}|^2 t} |\vec{\omega}|^{-\alpha} d\vec{\omega}. \end{aligned}$$

Jeg indfører nu  $N$ -dimensionelle sfæriske koordinater  $(\rho, \varphi_1, \dots, \varphi_{N-1})$

$$\|L\|^2 = \underbrace{\int \dots \int}_N \int_{\rho \in [0, \infty]; \varphi_1, \dots, \varphi_{N-1} \in [0, 2\pi]} \rho^{-\alpha+N-1} e^{\rho^2 t} d\rho d\varphi_1 \dots d\varphi_{N-1},$$

og benytter Ligning 3 og kan omskrive ovenstående til

$$\|L\|^2 = (2\pi)^{N-1} \frac{\Gamma(-\frac{\alpha}{2} + \frac{N}{2})}{2t^{-\frac{\alpha}{2} + \frac{N}{2}}} = K \cdot t^{\frac{\alpha}{2} - \frac{N}{2}},$$

hvor  $K$  er en konstant. □

Det ses at den i Teorem 9 angivne normalisering er konsistent med Teorem 7–8. Det ses endvidere at dimensionen af billedet har indflydelse på normaliseringen af den 0'te ordens billedafledte.

Jeg vil ligesom for det 1-dimensionelle billede finde normaliseringen af billedafledte. Den type billedafledte jeg er interesseret i er alle koordinat-invarianter der er kvadratiske i  $L$  på formen

$$L_{\underbrace{i_1 i_2 i_3 \dots}_{2n-k}} L_{\underbrace{i_1 \dots i_{2n-k} i_{2n-k+1} \dots}_{k}} \quad (5)$$

Eksempler på invarianter på denne form er  $L_i L_{ijj}$  og  $L_{ij} L_{ij}$ . Valget af denne form for invarianter skyldes at denne type invarianter er interessante ved feature-detektion. Ifølge [NFD97] gælder følgende relation

$$\int L_{\underbrace{i_1 i_2 i_3 \dots}_{2n-k}} L_{\underbrace{i_1 \dots i_{2n-k} i_{2n-k+1} \dots}_{k}} d\vec{x} = \int L_{\underbrace{ijk \dots}_n} L_{\underbrace{ijk \dots}_n} d\vec{x},$$

hvilket betyder at jeg ved udledning af normaliseringen af invarianter på formen angivet i Ligning 5 kan nøjes med at betragte invarianter som har formen

$$L^{(n)} L^{(n)} = L_{\underbrace{ijk \dots}_n} L_{\underbrace{ijk \dots}_n}$$

Koordinat-invarianter på denne form er lettere at håndtere.

I Fourier domænet har denne type billedafledte følgende form,

$$\begin{aligned} \tilde{L}^{(n)}(\vec{\omega}; t) \tilde{L}^{(n)}(\vec{\omega}; t) &= \tilde{L}_{\underbrace{ijk \dots}_n}(\vec{\omega}; t) \tilde{L}_{\underbrace{ijk \dots}_n}(\vec{\omega}; t) = \\ \tilde{G}_{\underbrace{ijk \dots}_n}^2(\vec{\omega}; t) \tilde{f}_\alpha^2(\vec{\omega}) &= i^n (\omega_i^2 \omega_j^2 \omega_k^2 \dots) \tilde{G}^2(\vec{\omega}; t) \tilde{f}_\alpha^2(\vec{\omega}), \end{aligned}$$

hvor  $i = \sqrt{-1}$ . Ifølge [NFD97] kan dette, i det tilfælde hvor  $i \neq j \neq k \neq \dots$ , omskrives til

$$\tilde{L}^{(n)}(\vec{\omega}; t) \tilde{L}^{(n)}(\vec{\omega}; t) = i^n |\vec{\omega}|^{2n} \tilde{G}^2(\vec{\omega}; t) \tilde{f}_\alpha^2(\vec{\omega}).$$



For at dette også holder for  $i = j = k \dots$ , skal  $\tilde{L}(\vec{\omega}; t)$  være forsvindende på randen. Denne relations korrekthed kan anskueliggøres ved at betragte følgende to eksempler. Kvadratet af gradienten af et 2-dimensionelt Fourier-billede, dvs. når  $n = 1$ , giver følgende relation,

$$\begin{aligned} |\nabla L|^2 &= |\tilde{L}_i \tilde{L}_i| = |\tilde{L}_x^2 + \tilde{L}_y^2| \\ &= |i(\omega_x^2 + \omega_y^2) \tilde{G}^2(\vec{\omega}; t) \tilde{f}_\alpha^2(\vec{\omega})| = |\vec{\omega}|^2 |\tilde{L}|^2. \end{aligned}$$

Kvadratet af sporet<sup>10</sup> af Hessian matricen<sup>11</sup> af et 2-dimensionelt Fourier-billede, dvs. når  $n = 2$ , giver følgende relation,

$$\begin{aligned} |tr(\tilde{H})|^2 &= |\tilde{L}_{xx} + \tilde{L}_{yy}|^2 = |\tilde{L}_{xx}^2 + L_{yy}^2 + \tilde{L}_{xx} \tilde{L}_{yy}| \\ &= |((\omega_x \omega_x)^2 + (\omega_y \omega_y)^2 + \omega_x \omega_x \omega_y \omega_y) \tilde{L}^2| = |\vec{\omega}|^4 |\tilde{L}|^2. \end{aligned}$$

Jeg vil betragte  $L_1$ -normen af invarianter på formen  $L^{(n)} L^{(n)}$ . Grunden til dette skyldes at  $L^{(n)} L^{(n)}$  er et produkt af to billedeafledte, og derfor er  $L_1$ -normen af  $L^{(n)} L^{(n)}$  ækvivalent med  $L_2$ -normen af  $L^{(n)}$ . I udledningen af nedenstående teorem benytter jeg at,  $L_1$ -normen af koordinat-invarianter på formen  $L^{(n)} L^{(n)}$ , ifølge [NFD97], er givet ved,

$$\|L^{(n)} L^{(n)}\|_1 = \int_{\vec{\omega} \in \mathbb{R}^N} |\tilde{L}^{(n)} \tilde{L}^{(n)}| d\vec{\omega}. \quad (6)$$

**Teorem 10** Ved normalisering af de afledte af et  $N$ -dimensionelt skalarumbillede  $L(\vec{x}; t)$ , som har formen

$$L^{(n)} L^{(n)} = L_{\underbrace{i_1 i_2 i_3 \dots}_{2n-k}} L_{i_1 \dots i_{2n-k} \underbrace{i_{2n-k+1} \dots}_{k}},$$

kan man benytte følgende udtryk,

$$L_{norm}^{(n)}(\vec{x}; t) L_{norm}^{(n)}(\vec{x}; t) = \left( t^{-\frac{\alpha}{2} + n + \frac{N}{2}} \right) L^{(n)}(\vec{x}; t) L^{(n)}(\vec{x}; t).$$

**Bevis:** Beviset forløber som ovenfor, jeg starter med at finde  $L_1$ -normen af  $L^{(n)} L^{(n)}$  ved at benytte Ligning 6,

$$\begin{aligned} \|L^{(n)} L^{(n)}\|_1 &= \int_{\vec{\omega} \in \mathbb{R}^N} |\tilde{L}^{(n)} \tilde{L}^{(n)}| d\vec{\omega} = \int_{\vec{\omega} \in \mathbb{R}^N} |\underbrace{\tilde{G}_{ijk \dots}^2}_{n}(\vec{\omega}; t) \tilde{f}_\alpha^2(\vec{\omega})| d\vec{\omega} \\ &= \int_{\vec{\omega} \in \mathbb{R}^N} |i^n |\vec{\omega}|^{2n} e^{-|\vec{\omega}|^2 t} \tilde{f}_\alpha^2(\vec{\omega})| d\vec{\omega} = \int_{\vec{\omega} \in \mathbb{R}^N} e^{-|\vec{\omega}|^2 t} |\vec{\omega}|^{-\alpha + 2n} d\vec{\omega}, \end{aligned}$$

hvor det blev benyttet at  $|i|^n = 1$ . Jeg indfører ligesom ovenfor  $N$ -dimensionelle sfæriske koordinater og benytter ligning 3,

$$\begin{aligned} &\underbrace{\int \dots \int}_N \int_{\rho \in [0, \infty]; \varphi_1, \dots, \varphi_{N-1} \in [0, 2\pi]} \rho^{-\alpha + 2n + N - 1} e^{\rho^2 t} d\rho d\varphi_1 \dots d\varphi_{N-1} \\ &= (2\pi)^{N-1} \frac{\Gamma(-\frac{\alpha}{2} + n + \frac{N}{2})}{2t^{-\frac{\alpha}{2} + n + \frac{N}{2}}} = K \cdot t^{\frac{\alpha}{2} - n - \frac{N}{2}}, \end{aligned}$$

hvor  $K$  er en konstant. □

<sup>10</sup>Sporet af en matrix er summen af diagonalelementerne og betegnes ofte med  $tr(\cdot)$ .

<sup>11</sup>Hessian matricen af en funktion er i tensor notation givet ved  $L_{ij}$ . I 2-D ser Hessian matricen  $H$ , således ud,  $H = \begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} \\ L_{yx} & L_{yy} \end{pmatrix}$ .

Det bør bemærkes at dette resultat gælder for alle invarianter som er kvadratiske i billedet  $L$  med differentiationsordenen  $n$ . Denne type invarianter er netop dem der bliver brugt som feature-detektorer. Teorem 10 er konsistent med Teorem 7–9 og det ses at 0'te ordens billedafledte skal normaliseres med  $t^{-\frac{\alpha}{2} + \frac{N}{2}}$ , samt at normalisering af  $n$ 'te ordens afledte stemmer overens med dimensionsanalyse normaliseringsmetoden Ligning 1 og Lindebergs normaliseringsmetode, se Ligning 2.

Jeg har nu vist 4 teoremer der er gyldige for kontinuerte billeder  $L(\vec{x}; t)$ . I datalogiske sammenhænge er det dog interessant om dette holder for diskret samplede billeder. Jeg har i denne rapport valgt at foretage alle udledninger og betragtninger på kontinuerte funktioner, for at undgå en yderligere komplicering af teorien ved at indføre diskrete funktioner. Deriche og Tewfik [DT93] beskriver i deres artikel egenskaberne ved den diskrete 1-dimensionelle fraktionelle Brownske bevægelse. Jeg kunne have valgt at benytte deres resultater, men en indførelse af deres resultater vil have kompliceret mine resultater unødigt. Jeg vælger derfor at korrigere mine senere eksperimenter for eventuelle diskretiseringseffekter, hvilket leder frem til min hypotese.

**Hypotese 1** *Teorem 7–10 er også gyldige for diskret samplede billeder  $L(\vec{x}; t)$ , under antagelse af at disse billeders intensitetsflade er en diskretisering af en fraktionel Brownsk bevægelse.*

Jeg foreslår altså at udskifte Lindebergs  $\gamma$ -normalisering af skalabilleder,  $\gamma_n = n\gamma$ , med  $\gamma_n = -\frac{\alpha}{2} + n + \frac{N}{2}$ . Det ses som tidligere omtalt at med min normalisering skal man behandle den 0'te ordens afledte af billedet, dvs. originalbilledet, anderledes end den  $n$ 'te ordens afledte. Man skal normalisere originalbilledet med  $-\frac{\alpha}{2} + \frac{N}{2}$ , derpå findes normaliseringen af den  $n$ 'te ordens afledte ved at addere  $n$  på normaliseringsfaktoren. Dette adskiller sig fra normalisering baseret på dimensionsanalyse og Lindebergs  $\gamma$ -normalisering, hvilket skyldes at den fraktionelle Brownske bevægelse er den fraktionelle differentiation eller integration af den Brownske bevægelse. Derfor er det nødvendigt at normalisere med en faktor indeholdende  $\alpha$ , som er en funktion af  $H$ , der bestemmer graden af fraktionalitet af differentiationen eller integrationen.

Jeg vil fremhæve, at mit udtryk for  $\gamma_n$  er i fin overensstemmelse med de  $\gamma$ -værdier som Lindeberg selv foreslår i sin artikel. I Tabel 1 har jeg reproduceret en af Lindebergs tabeller over værdier af  $\gamma$  for forskellige feature-detektorer. Jeg har udvidet tabellen med de tilhørende værdier af  $H$  og  $D_H$ . I tabellen ses det at Lindebergs valg af  $\gamma$  medfører at kanter og bakketoppe har en fraktal dimension med værdien  $D_H = 2$ , hvilket virker intuitivt korrekt, idet kanter og bakketoppe i billeder ikke er ideelle, men har en udbredelse. Lindeberg benytter også denne antagelse til at udlede værdierne for  $\gamma$ , så derfor er det ikke overraskende at disse får en fraktal dimension med værdien 2. Det er derimod mere overraskende at hjørner og blobs har en fraktal dimension på  $D_H = 2.5$ , hvilket angiver at tilsyneladende 2-dimensionelle strukturer i et billede snarere er 3-dimensionelle. Endvidere er den fraktale dimension med værdien  $D_H = 2.5$ , som tidligere omtalt, også tilsyneladende den dominerende fraktale dimension for naturlige billeder. Hvis man antager at billeder af naturlige scener kan modelleres med fraktionelle Brownske bevægelser, så antyder en fraktal dimension på  $D_H = 2.5$  at hjørner og blobs er 2-dimensionelle klassiske Brownske flader, i det at  $H = 1/2$ .

I det efterfølgende afsnit vil jeg vise, at Hypotese 1 er gyldig under visse forudsætninger. Dette vil jeg gøre ved, at generere kunstige billeder for hvilke jeg kender  $\alpha$ , dvs. den fraktale

Feature type	Normaliserede styrke mål	$\gamma$	$H$	$D_H$
Kant	$t^{\gamma/2}L_v$	1/2	1	2
Bakketop	$t^{2\gamma}(L_{pp} - L_{qq})^2$	3/4	1	2
Hjørne	$t^{2\gamma}L_v^2L_{uu}$	1	1/2	2.5
Blob	$t^\gamma \nabla^2 L$	1	1/2	2.5

Tabel 1: Denne tabel viser de feature-styrkemål og tilsvarende  $\gamma$ -værdier, som Lindeberg har benyttet i sine forsøg med  $\gamma$ -normalisering. Tabellen er en reproduktion fra [Lin96b]. Jeg har tilføjet værdierne af  $H$  og  $D_H$  for de pågældende  $\gamma$ -værdier, baseret på resultatet fra Teorem 10. Koordinaterne  $(u, v)$  angiver et koordinatsystem der er lagt i gradientens retning og koordinaterne  $(p, q)$  angiver det lokale koordinatsystem som er lagt i hovedkrumningsretningerne.

dimension.

## 6 Anvendt normalisering

I dette afsnit vil jeg lave en række eksperimenter, som har til formål at vise gyldigheden af Hypotese 1 og underbygge og visualisere nogle af resultaterne fra de foregående afsnit.

Den Brownske bevægelse defineret i Def. 1 er også defineret som integreret Gaussisk støj. På Figur 2 ses eksempler på 1D og 2D Gaussisk støj og de tilhørende spektraltætheder. Spektraltætheden for det 2-dimensionelle billede er opbygget ved at midle over punkter med samme frekvens, dvs. ved at midle over punkter med samme  $L_2$ -norm i spektraet. Det ses at de to signalers spektra er næsten konstante.

Definition 5 definerer den 1-dimensionelle fraktionelle Brownske bevægelse ved integration af den Brownske bevægelse. Jeg har derfor forsøgt numerisk at integrere det 1-dimensionelle signal fra Figur 2, og resultatet kan ses i Figur 3. Som forventet har dette signal en hældning på  $\alpha \approx 2.15$ , svarende til  $H \approx 0.5$ , dvs. signalet er en klassisk Brownsk bevægelse. Det er desværre ikke lige så simpelt at generere 2-dimensionelle fraktionelle Brownske bevægelser, da jeg ikke har fundet en definition af den  $N$ -dimensionelle fraktionelle Brownske bevægelse på integralform.

Gårding [Går87] fremlægger en anden metode til at generere 2-dimensionelle fraktionelle Brownske flader. Han foreslår at man opbygger billedet  $f_\alpha(x, y)$  i frekvensdomænet, hvor man sikrer at billedets spektraltæthed opfylder Teorem 3. Dette vil sige at i et punkt  $(\omega_x, \omega_y)$  i frekvensbilledet, skal amplituden af  $\tilde{f}_\alpha(\omega_x, \omega_y)$  være bestemt ved

$$|\tilde{f}_\alpha(\omega_x, \omega_y)|^2 = (\omega_x^2 + \omega_y^2)^{-\frac{\alpha}{2}}.$$

Alle punkter i frekvensbilledet er komplekse, så fasen  $\theta$  i punktet  $(\omega_x, \omega_y)$  findes ved at udtrække et tilfældigt tal  $\theta$  i intervallet  $[0; 2\pi]$ , således at

$$\tilde{f}_\alpha(\omega_x, \omega_y) = (\omega_x^2 + \omega_y^2)^{-\frac{\alpha}{4}} (\cos \theta + i \sin \theta).$$

For at sikre at billedet i det spatielle domæne er reelt, er det nødvendigt at sikre at frekvensbilledet er en lige funktion i realdelen og en ulige funktion i imaginærdelen. Dette gøres ved at sikre at frekvensbilledet har en kompleks konjugeret symetri. På Figur 4 har jeg forsøgt at vise hvorledes et  $8 \times 8$  billede skal opbygges. For at lette opbygningen af billedet vælger

$\alpha$	estimerede $\gamma$ værdier	faktiske $\gamma$ værdier	relativ fejl
1	-1.61	-1.5	-7.33 %
2	-1.25	-1	-25.00 %
2.5	-1.09	-0.75	-45.33 %
3	-0.93	-0.5	-86.00 %
4	-0.65	0	–
5	-0.44	0.5	188.00 %

Tabel 2: I denne tabel findes de estimerede værdier for normaliseringsfaktoren ud fra graferne i Figur 8, endvidere findes de faktiske værdier. Disse værdier er beregnet ved at benytte normaliseringsudtrykket fra Teorem 10, hvor  $n = 1$  og  $N = 2$ .

jeg kun at betragte billeder der har pixel-sidelængder der er en potens af 2. Jeg har implementeret denne metode i matematik systemet Matlab. Kildeteksten til matlab-programmet findes i Appendix A.1.

Et eksempel på den 1-dimensionelle fraktionelle Brownske bevægelse produceret ved hjælp af ovennævnte program findes i Figur 5, samt bevægelsens spektraltæthed. Figur 6 indeholder et eksempel på den 2-dimensionelle fraktionelle Brownske bevægelse med tilhørende spektraltæthed, som er konstrueret ved at midle over punkter i frekvensbilledet med samme  $L_2$ -norm.

Figur 7 indeholder seks 2-dimensionelle billeder og på Figur 10 findes seks 1-dimensionelle billeder, alle med forskellige  $\alpha$ -værdier konstrueret ved hjælp af ovennævnte program. Jeg har benyttet disse billeder i mit forsøg på at eftervise Hypotese 1. Jeg kigger på to typer af differentialudtryk for de 2-dimensionelle billeder,  $L_i L_i$  og  $L_{ij} L_{ji}$ , og på  $L_x L_x$  for de 1-dimensionelle, endvidere betragter jeg disse billeders udvikling over skala.

Jeg har benyttet programmet `tgiv`, som er skrevet af folk fra Utrecht Universitet, til at skabe skalarumbillederne af de to differentialudtryk for de 2-dimensionelle billeder. Jeg har lavet 10 skalabilleder for de to differentialudtryk for alle seks billeder. De 10 skalaer er udvalgt i eksponentielt voksende orden i intervallet mellem 2 og 30. Ved at benytte et andet program, `statim`, skrevet af de samme folk, har jeg beregnet  $L_1$ -normen af hver enkelt skalabillede. Grunden til at jeg benytter  $L_1$ -normen skyldes min definition af  $n$ 'te ordens  $N$ -dimensionelle afledte,  $L^{(n)}(\vec{x}; t)$ , som ligger til grund for Teorem 10. De herved fremkomne værdier af  $L_1$ -normen, har jeg plottet i Figur 8–9, og jeg har estimeret hældningen, dvs. værdien af  $\gamma$ , af disse grafer og opskrevet dem i tabel 2–3. Disse tabeller indeholder også den relative fejl procent beregnet ved hjælp af

$$\frac{|\gamma - \gamma_e|}{\gamma} \cdot 100$$

hvor  $\gamma$  er den rigtige værdi og  $\gamma_e$  er den estimerede værdi.

Det ses at de estimerede værdier ligger rimelig tæt på de faktiske værdier af  $\gamma$ , dog er værdierne for  $\alpha = 4, 5$  meget ved siden af det forventede. Dette skyldes at  $\alpha > 3$  ligger udenfor det område som Definition 5 er gyldig for, og betyder intuitivt at den Brownske bevægelse er integreret  $n > 1$  gange. Endvidere er statistikken i mine billeder med  $\alpha > 3$  ikke tilstrækkelig, da billedstrukturenes omfang rækker ud over billedets udsnit. Det ses at værdier for  $\alpha$  omkring 1 til 2.5 giver det bedste resultat, endvidere ses det at når

$\alpha$	estimerede $\gamma$ værdier	faktiske $\gamma$ værdier	relativ fejl
1	-2.59	-2.5	-3.6 %
2	-2.2	-2	-10 %
2.5	-2.01	-1.75	-14.86 %
3	-1.82	-1.5	-21.33 %
4	-1.46	-1	-46 %
5	-1.13	-0.5	-126 %

Tabel 3: I denne tabel findes de estimerede værdier for normaliseringsfaktoren ud fra graferne i Figur 9, endvidere findes de faktiske værdier. Disse værdier er beregnet ved at benytte normaliseringsudtrykket fra Teorem 10, hvor  $n = 2$  og  $N = 2$ .

$\alpha$	estimerede $\gamma$ værdier	faktiske $\gamma$ værdier	relativ fejl
1	-1.19	-1	-19 %
1.5	-0.97	-0.75	-29.33 %
2	-0.92	-0.5	-84 %
2.5	-0.76	-0.25	-204 %
3	-0.66	0	–
4	-0.55	0.5	210 %

Tabel 4: I denne tabel findes de estimerede værdier for normaliseringsfaktoren ud fra graferne i Figur 11, endvidere findes de faktiske værdier, samt den relative fejl i procent. Disse værdier er beregnet ved at benytte normaliseringsudtrykket fra Teorem 10, hvor  $n = 1$  og  $N = 1$ .

differentiationsordene øges, dvs. når  $n$  vokser, så forbedres resultaterne i  $\alpha \in [1; 3]$ . Især skal det fremhæves at for  $\alpha = 1$  og  $n = 2$ , er den relative fejl helt nede på  $-3.6\%$ .

Jeg har foretaget det samme forsøg med de 1-dimensionelle billeder i Figur 10. Jeg har opbygget skalarummet for hvert billede ved at folde billedet med numerisk differentierede Gauss-funktioner  $G_x$  med forskellig spredning. Dette Matlab-program findes i Appendix A.7. Resultatet af kørsel med dette program findes på Figur 11 og i Tabel 4.

Resultaterne for de 1-dimensionelle billeder har samme kvalitet som resultaterne for de 2-dimensionelle billeder. Her kan det endvidere konkluderes at for stigende dimension  $N$ , forbedres resultaterne.

Grunden til at mine resultater ikke er fuldstændig nøjagtige er diskretisering af de benyttede billeder. Mine 2-dimensionelle billeder indeholder alle  $256 \times 256$  billedpunkter, hvilket i Fourier-domænet betyder at høje frekvenser ikke medtages i billedet. Ved brug af billeder med flere billedpunkter, vil man udvide det betragtede udsnit af Fourier-domænet og dermed forbedre billedets statistik, hvilket ville betyde at mine beregninger af  $L_1$ -normen ville forbedres og dermed ville mine estimer af  $\gamma$  forbedres. Jeg har valgt kun at benytte syntetiske billeder med  $256 \times 256$  billedpunkter, da min generatorfunktion kræver at de billeder den genererer har et antal billedpunkter, der er en potens af 2, og derfor ville det kun være muligt at generere billeder med et billedpunktsantal på  $512 \times 512$ ,  $1024 \times 1024$  osv., hvilket kræver meget regnekraft.

Man kan på Figur 8–9 og 11 se at når skalaen stiger så falder estimatet af  $L_1$ -normen hurtigere, dvs. værdierne af  $\gamma$  stiger, hvilket betyder at estimatet af  $\gamma$  over hele det betragt-

titel	estimerede $\gamma$ værdier	$H$	$D_H$
garden	-1.80	0.70	2.30
brain	-1.84	0.66	2.34
åkande	-1.59	0.91	2.09
seawd	-1.78	0.72	2.28
newrut	-1.79	0.71	2.29
tornet	-1.72	0.78	2.22
trees	-1.84	0.66	2.34

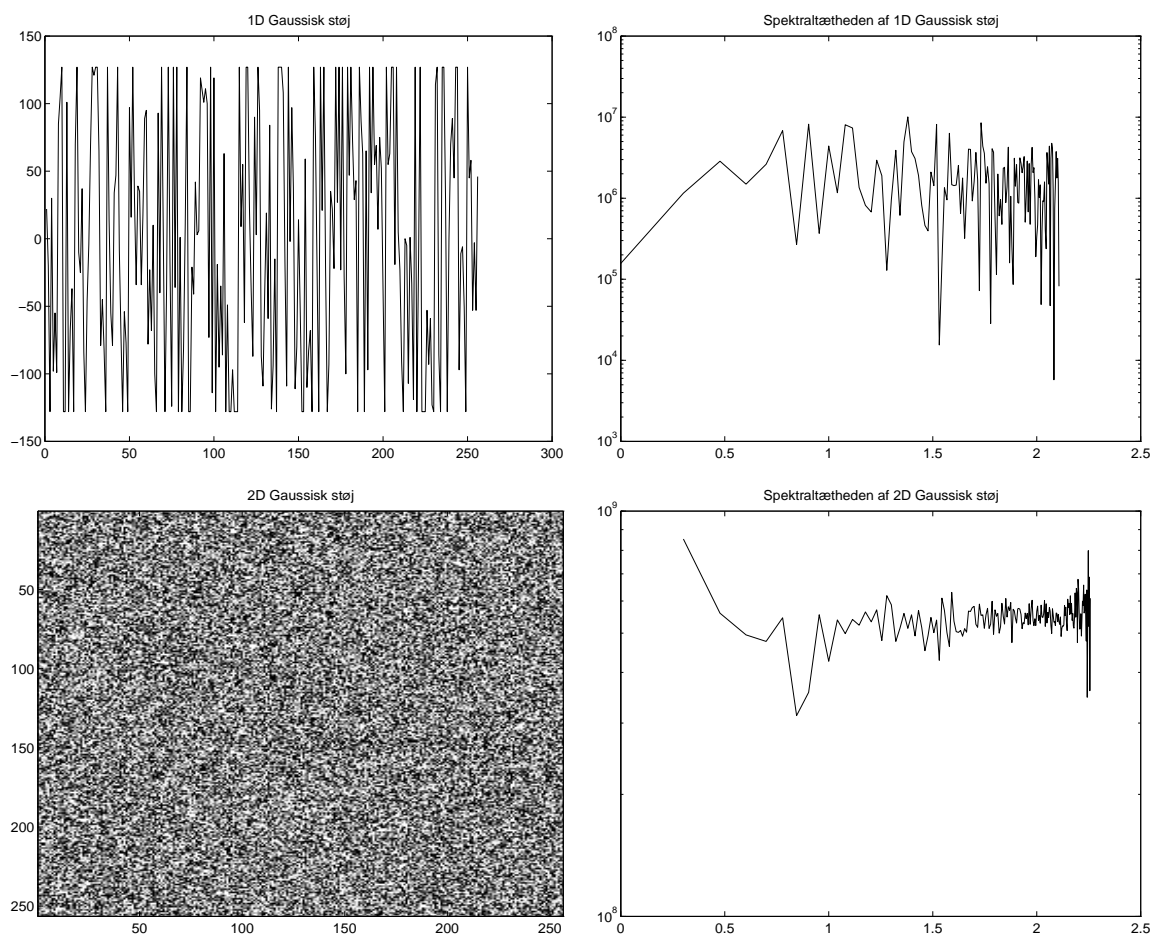
Tabel 5: I denne tabel findes de estimerede værdier for normaliseringsfaktoren ud fra graferne i Figur 12–14, endvidere angives værdierne af  $H$  og  $D_H$  ud fra disse estimater. Værdierne af  $H$  er beregnet ud fra  $H = n + \frac{N}{2} - \gamma - \frac{1}{2}$ , hvor  $n = 2$  og  $N = 2$ , og værdierne af  $D_H$  er beregnet ud fra relationen i Teorem 4.

ede skala-interval forringes. Dette er igen et tegn på at flere billedpunkter ville forbedre estimatet.

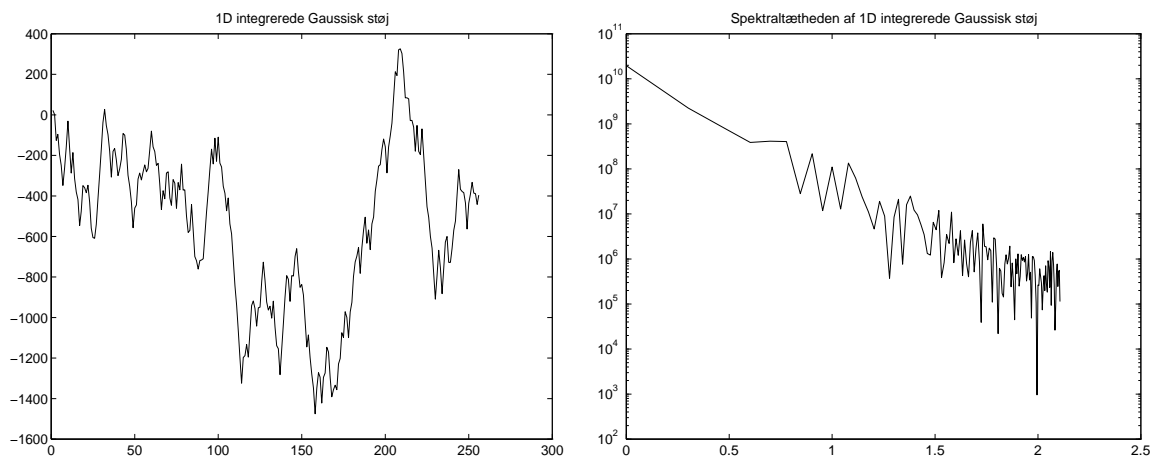
Jeg har forsøgt at estimere den fraktale dimension af nogle billeder af naturlige scener, ved at benytte samme metode som for mine 2-dimensionelle syntetiske billeder. Jeg har igen benyttet programmet `tgw` til at skabe et skalarum for hvert billede og derpå benyttet `statim` til at beregne  $L_1$ -normen af billederne i skalarummet. Jeg har benyttet differentialudtrykket  $L_{ij}L_{ji}$ , da dette ifølge ovenstående vil give et bedre resultat. De benyttede billeder og de tilhørende  $L_1$ -norms grafer findes i Figur 12 – 14 og i Tabel 5 findes de estimerede værdier af Hausdorff-dimensionen  $D_H$  og parameteren  $H$ .

Disse resultater stemmer rimeligt godt overens med den generelle opfattelse af at billeder af naturlige scener har en fraktal dimension på approksimativt  $D_H \approx 2.5$ . Mine estimater ligger dog omkring  $D_H \approx 2.3$ , men dette skyldes sandsynligvis kvaliteten af og billedpunktsantallet i de benyttede billeder. Figur 14 indeholder to billeder med  $512 \times 512$  pixels. Bemærk at skala-graferne for disse to billeder er meget tæt på en ret linje, hvilket kan foranlede en til at tro at kvaliteten af de estimerede fraktale dimensioner for disse to billeder er meget tæt på den korrekte værdi. Dette viser også min påstand om at jo flere billedpunkter der er i de benyttede billeder jo bedre bliver estimatet af  $\gamma$  og dermed også estimatet af den fraktale dimension.

Det ville være interessant at lave en sammenlignende undersøgelse af andre metoder til at finde den fraktale dimension af et billede med denne metode, for at få et overblik over kvaliteten af de estimerede fraktale dimensioner. Men dette falder desværre udenfor denne rapports rammer. Det bør dog nævnes at min metode til estimering af den fraktale dimension adskiller sig fra andre metoder på et punkt. Det er nemlig muligt at give mening til estimater af den fraktale dimension i lokale punkter i billedet. Min metode er endvidere ganske simpel og indeholder ingen beregningsalgoritmer som ikke kan optimeres ganske tilfredsstillende i modsætning til andre metoder til at estimere den fraktale dimension. Disse metoder indebærer ofte tidskrævende sammentællinger og statistik på det betragtede billede.



Figur 2: På denne figur ses i venstre kolonne et eksempel på 1D Gaussisk støj og 2D Gaussisk støj. I højre kolonne ses de to billeders energispektra. Det 2-dimensionelle billede er genereret ved at tilføje Gaussisk støj, ved hjælp af et støj-generatorprogram, til et billede som havde intensitetsværdien 128 i alle billedpunkter. Det 1-dimensionelle billede er lavet ved at udskære en 1D-strimmel i det 2-dimensionelle billede. Matlab programmet til at lave 1D-billedet findes i Appendix A.2 og Matlab programmet til at lave 2D-billedet findes i Appendix A.3. Der er  $256 \times 256$  pixels i 2D-billedet og 256 pixel i 1D-billedet og den estimerede hældning af spektret er for 1D-signalet  $-0.06$  og for 2D-signalet  $0.01$ .

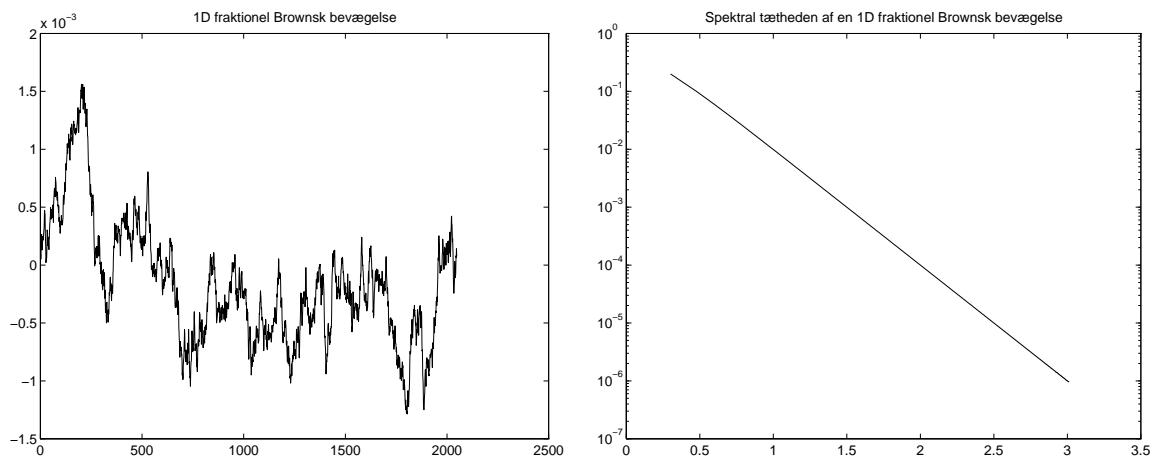


Figur 3: På denne figur ses i venstre kolonne et eksempel på 1D-integreret Gaussisk støj. I højre kolonne ses billedets spektraltæthed. Billedet er lavet ved at foretage en numerisk integration af det 1-dimensionelle billede fra Fig. 2. Se Matlab-programmet i Appendix A.2. Der er 256 pixels i billedet.

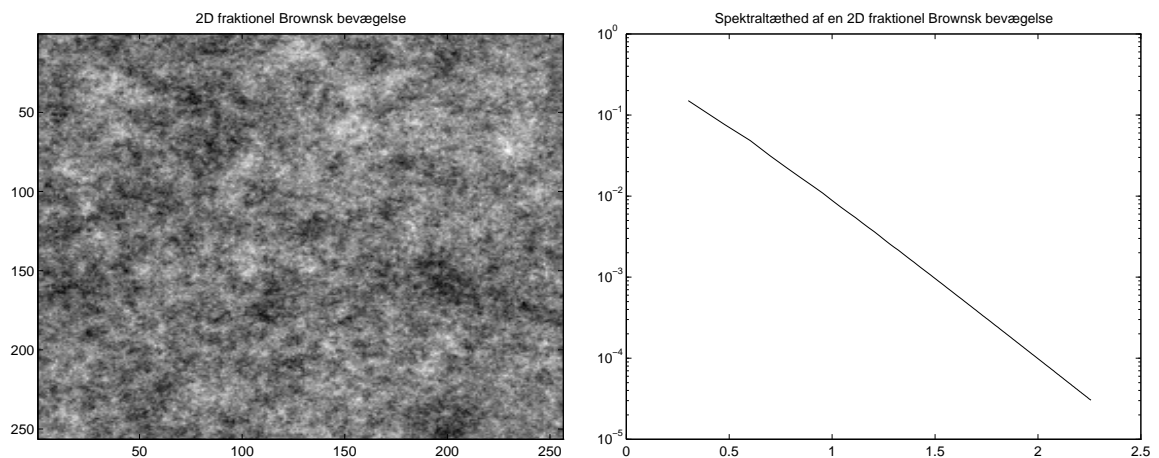
$$\begin{array}{cccccccc}
 a_{11}^* & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15}^* & \overline{a_{14}} & \overline{a_{13}} & \overline{a_{12}} \\
 a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} & a_{28} \\
 a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} & a_{38} \\
 a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} & a_{48} \\
 a_{51}^* & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55}^* & a_{56} & a_{57} & a_{58} \\
 \overline{a_{41}} & \overline{a_{48}} & \overline{a_{47}} & \overline{a_{46}} & \overline{a_{45}} & \overline{a_{44}} & \overline{a_{43}} & \overline{a_{42}} \\
 \overline{a_{31}} & \overline{a_{38}} & \overline{a_{37}} & \overline{a_{36}} & \overline{a_{35}} & \overline{a_{34}} & \overline{a_{33}} & \overline{a_{32}} \\
 \overline{a_{21}} & \overline{a_{28}} & \overline{a_{27}} & \overline{a_{26}} & \overline{a_{25}} & \overline{a_{24}} & \overline{a_{23}} & \overline{a_{22}}
 \end{array}$$

Figur 4: Denne figur er en skematisk tegning af, hvorledes det kunstige billede skal opbygges i Fourier-domænet, således at det er en lige funktion i real-delen og en ulige i imaginær-delen. Streg over et element angiver kompleks konjugering og \* angiver at det pågældende element skal være reelt.

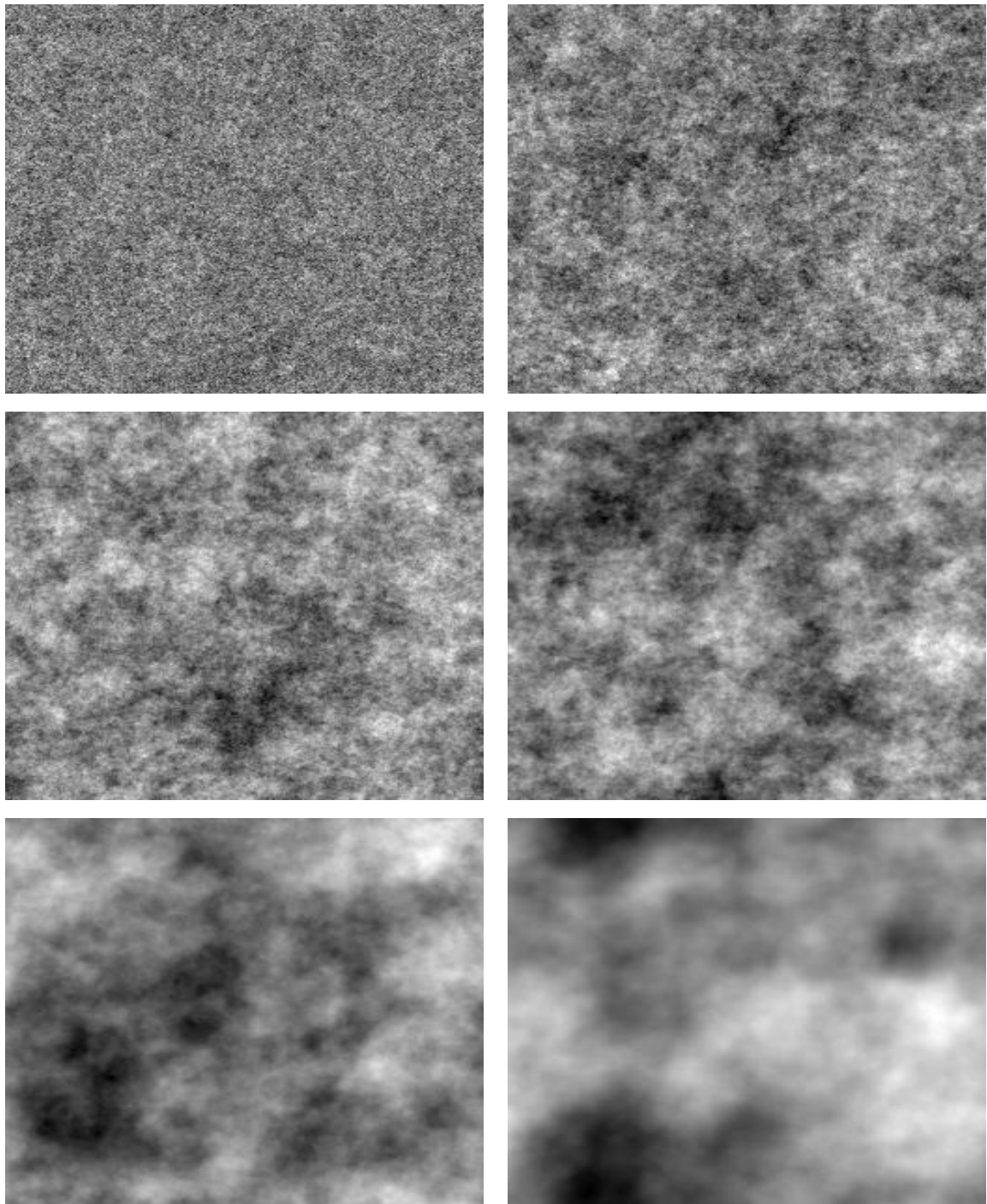




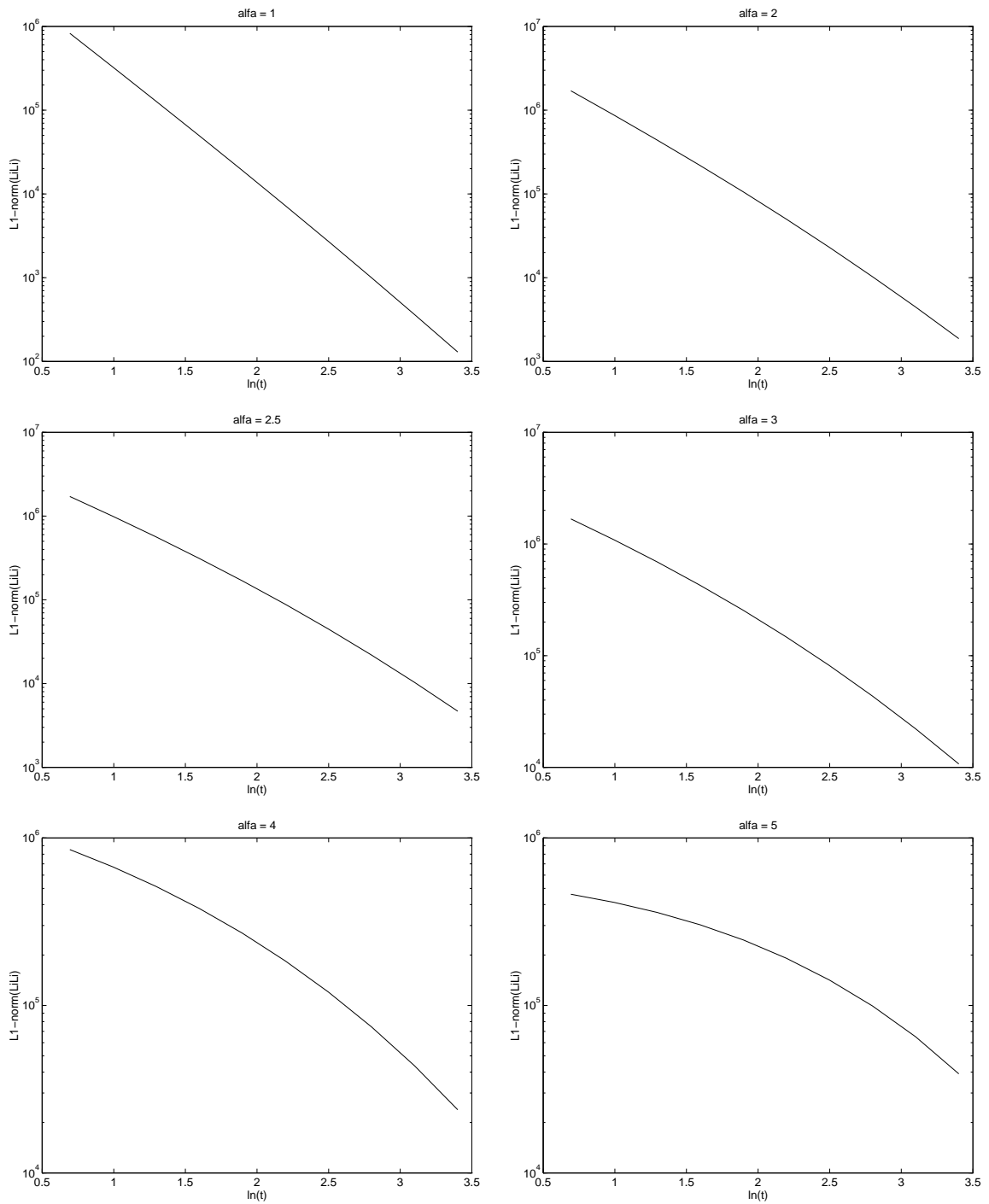
Figur 5: På denne figur ses i venstre kolonne et eksempel på en 1D fraktionel Brownsk bevægelse med  $H = 1/2$ . I højre kolonne ses billedets spektraltæthed. Hældningen af spektraltæthed for 1D fraktionelle Brownske bevægelser med  $H = 1/2$  er blevet estimerede ved at finde gennemsnittet af 10 signaler. Hældningen estimeres til  $\alpha \approx 1.997$  svarende til  $H \approx 0.5$ . Billedet er lavet ved at benytte det Matlab-program som er beskrevet i teksten. Se Matlab-programmet i Appendix A.4. Der er 2048 datapunkter i billedet.



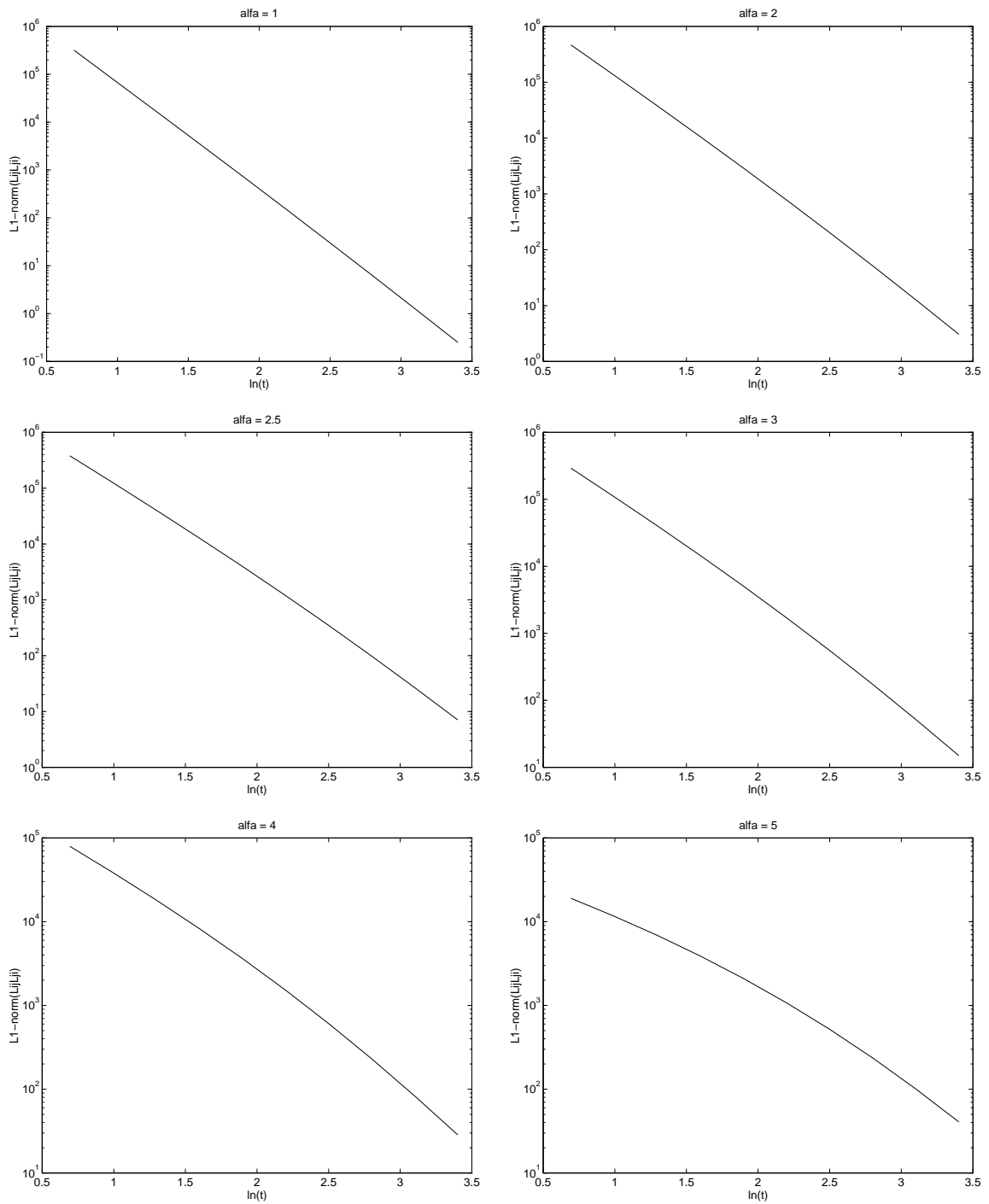
Figur 6: På denne figur ses i venstre kolonne et eksempel på en 2D fraktionel Brownsk bevægelse med  $H = 1/2$ , dvs.  $\alpha = 2$ . I højre kolonne ses billedets spektraltæthed. Hældningen af spektral tæthed for den 2-dimensionelle fraktionelle Brownske bevægelser er blevet estimerede ved at finde gennemsnittet af punkter med samme  $L_2$ -norm. Hældningen estimeres til  $\alpha \approx -1.95$ , dvs.  $H \approx 0.5$ . Billedet er lavet ved at benytte det samme Matlab-program som for Fig. 5. Se Matlab-programmet i Appendix A.5.



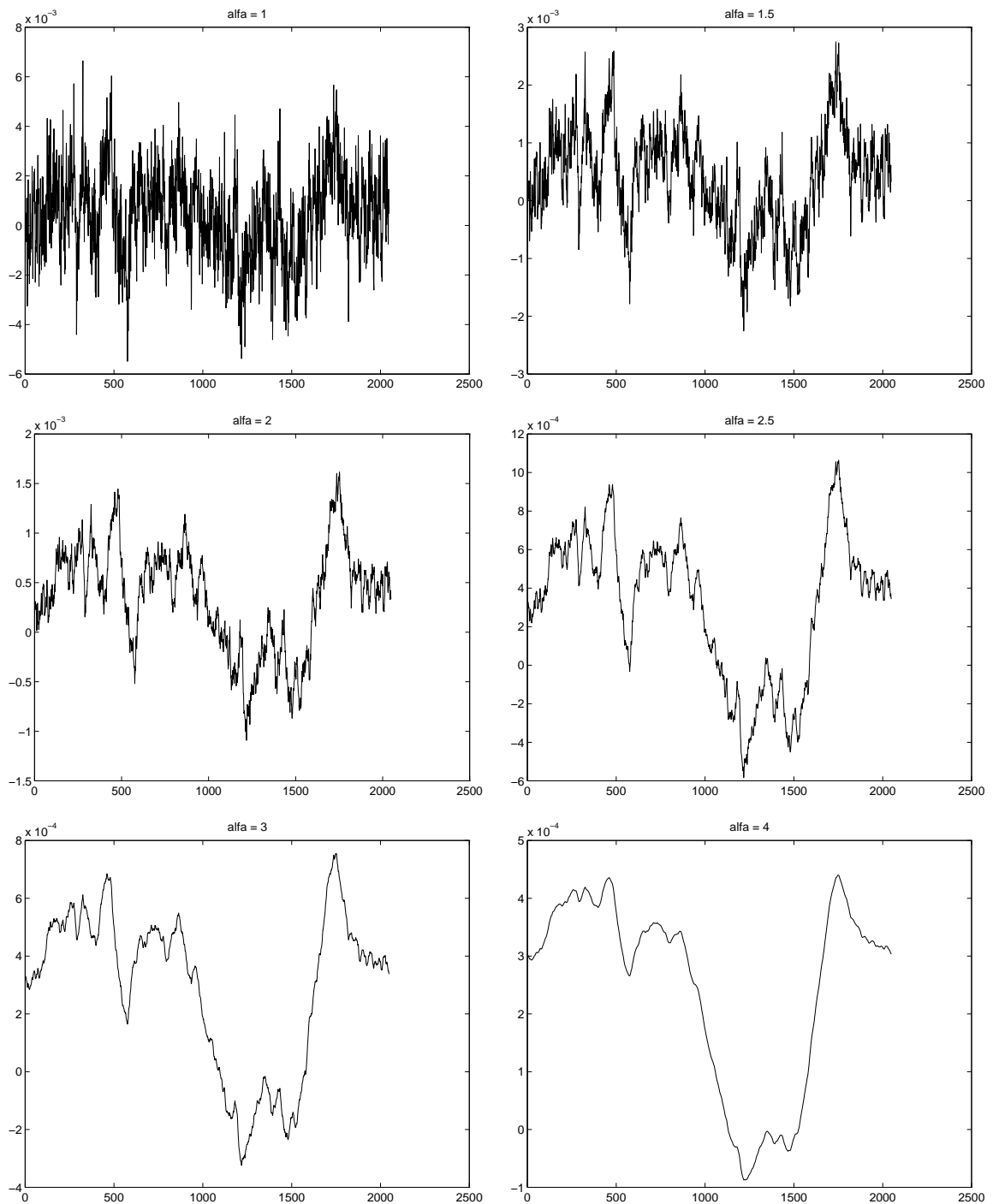
Figur 7: På denne figur ses 6 billeder genererede med det Matlab-program der er beskrevet i teksten og findes i Appendix A.1. I venstre kolonne fra oven og ned efter har  $\alpha$  værdierne 1, 2.5 og 4. I højre kolonne fra oven og ned efter er  $\alpha$  2, 3 og 5. Billederne består alle af  $256 \times 256$  pixel.



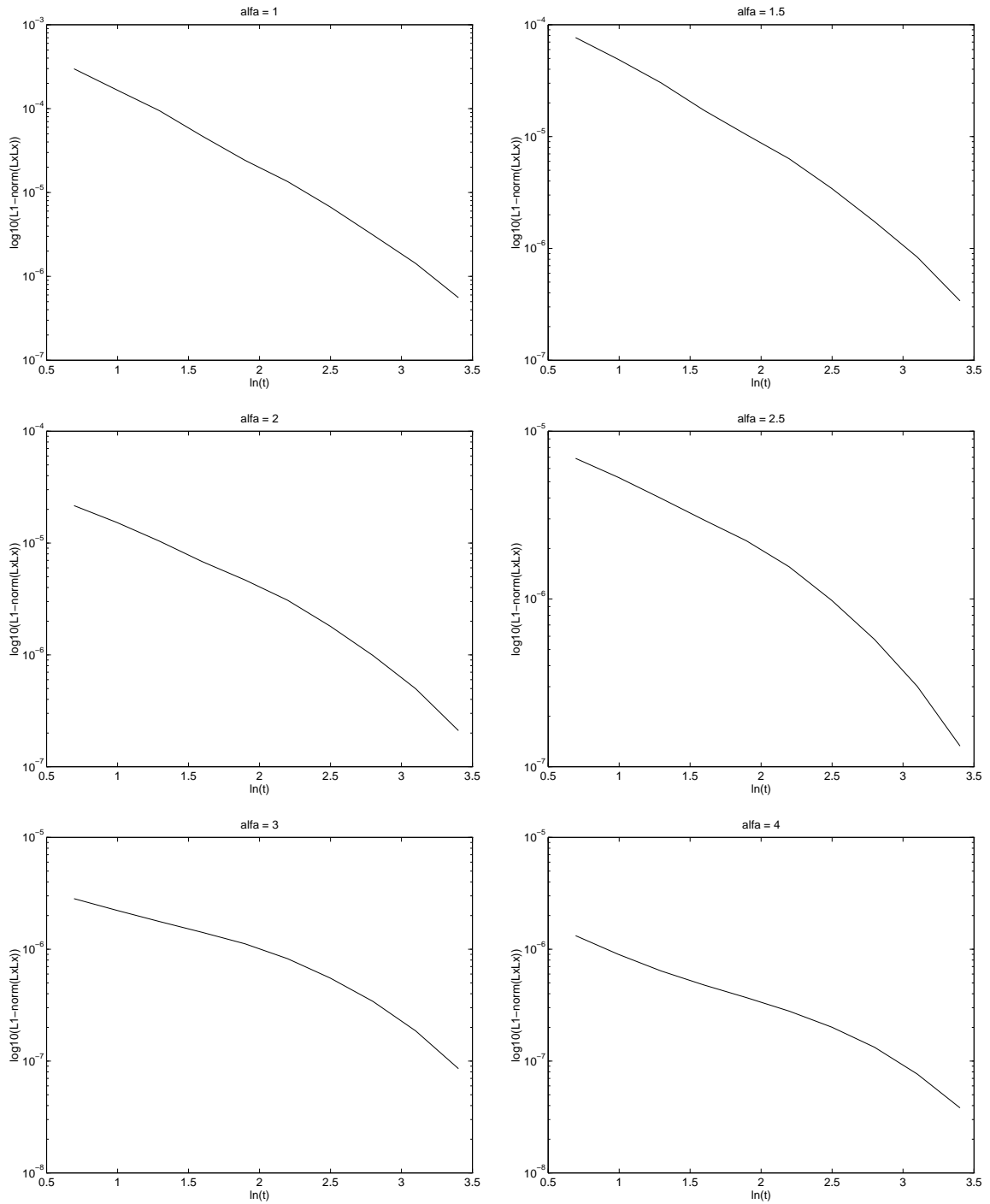
Figur 8: På denne figur ses hvorledes  $L_1$ -normen af  $L_i L_i_1$ , af billederne fra Figur 7, opfører sig over skala. I Tabel 2 ses de approximerede hældninger af disse linjer. Et eksempel på hvorledes disse grafer er blevet opbygget findes i Appendix A.6.



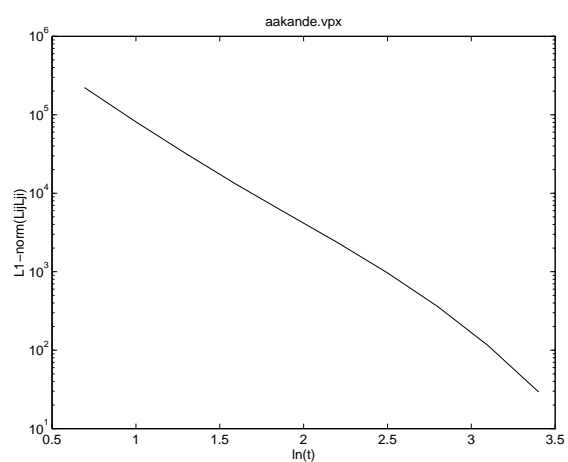
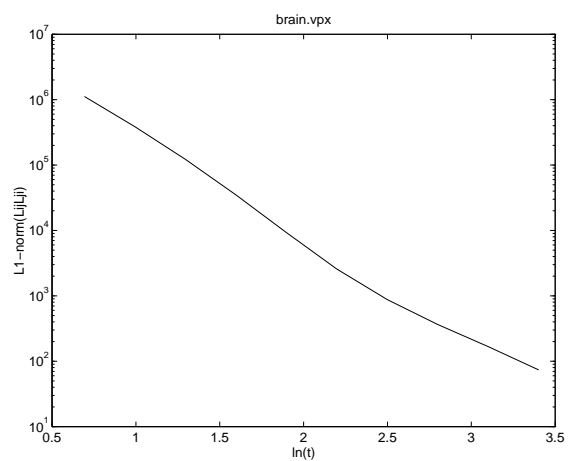
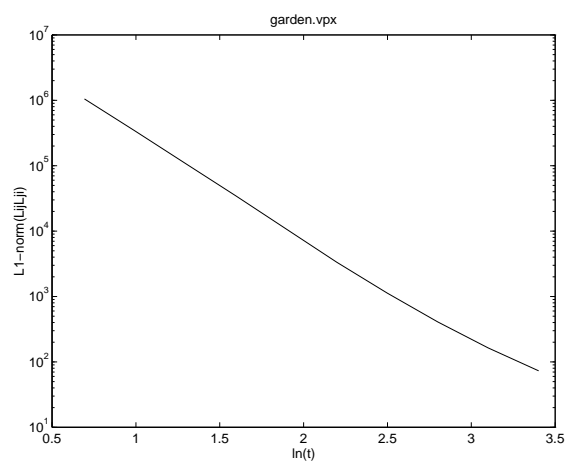
Figur 9: På denne figur ses hvorledes  $L_1$ -normen af  $L_{ij}L_{ji}$ , af billederne fra Figur 7, opfører sig over skala. I Tabel 3 ses de approximerede hældninger af disse linjer. Et eksempel på hvorledes disse grafer er blevet opbygget findes i Appendix A.6.



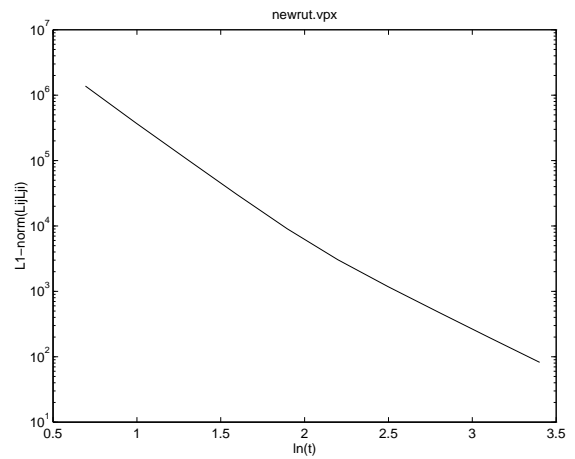
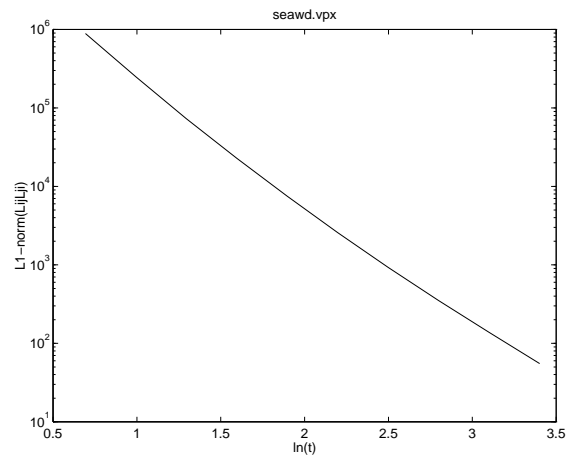
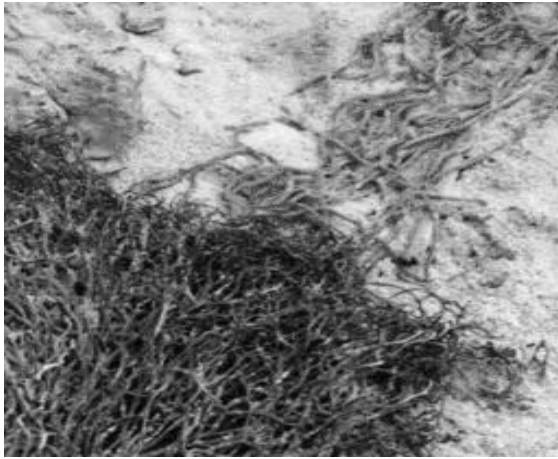
Figur 10: På denne figur ses 6 1-dimensionelle billeder genereret med det Matlab program der er beskrevet i teksten og findes i Appendix A.7. I venstre kolonne fra oven og ned efter har  $\alpha$  værdierne 1, 2 og 3. I højre kolonne fra oven og ned efter er  $\alpha$  1.5, 2.5 og 4. Billederne består alle af 2048 pixels.



Figur 11: På denne figur ses hvorledes  $L_1$ -normen af  $L_x L_x$ , af billederne fra Figur 10, opfører sig over skala. I Tabel 4 ses de approximerede hældninger af disse grafer. I Appendix A.7 findes det program der opbygger disse figurer.

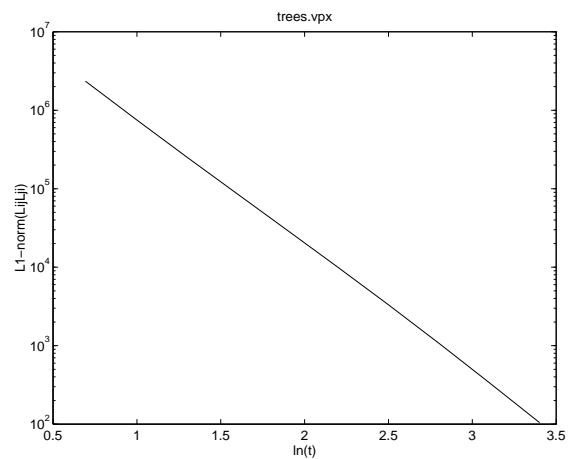
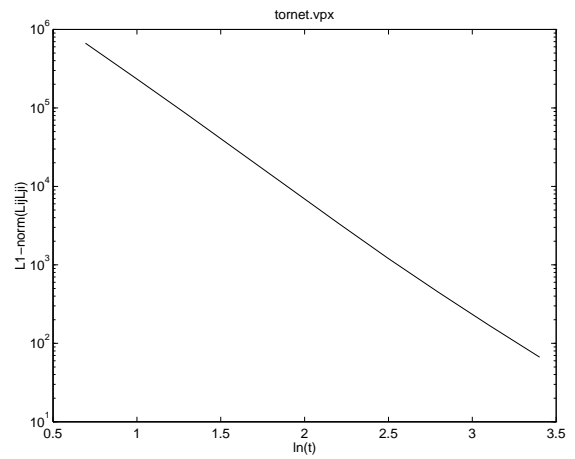


Figur 12: Denne figur viser tre  $256 \times 256$  pixel store billeder af naturlige scener og de tilsvarende grafer for  $L_1$ -normen af  $L_{ij}L_{ji}$  udvikling over skala. De estimerede hældninger af disse grafer findes i Tabel 5. Et eksempel på hvorledes disse grafer er blevet opbygget findes i Appendix A.6.



Figur 13: På denne figur ses to billeder af naturlige scener og de tilsvarende grafer for  $L_1$ -normen af  $L_{ij}L_{ji}$  udvikling over skala. De estimerede hældninger af disse grafer findes i Tabel 5. Begge billeder indeholder  $256 \times 256$  pixel. Et eksempel på hvorledes disse grafer er blevet opbygget findes i Appendix A.6.





Figur 14: På denne figur ses to billeder af naturlige scener og de tilsvarende grafer for  $L_1$ -normen af  $L_{ij}L_{ji}$  udvikling over skala. De estimerede hældninger af disse grafer findes i Tabel 5. Begge billeder indeholder  $512 \times 512$  pixel. Et eksempel på hvorledes disse grafer er blevet opbygget findes i Appendix A.6.

## 7 Konklusion

Jeg har i denne rapport klarlagt teorien omhandlende fraktionelle Brownske bevægelser og teorien for lineært skalarum. Jeg har udfra disse teorier og med inspiration fra Lindeberg [Lin94, Lin96a, Lin96b] opbygget en skalarumsnormaliseringsmetode der bygger på antagelsen om at billeder af naturlige scener kan modelleres ved hjælp af fraktionelle Brownske bevægelser. Denne normaliseringsmetode muliggør, i sammenhæng med feature-detektion, en normalisering der er tilpasset til den bestemte type feature man er interesseret i at detektere. Metoden er beskrevet ved Teorem 10. Jeg har vist at denne metode kan fungere på digitale billeder, ved at vise at Teorem 10 er gyldig for syntetiske digitale billeder. Jeg har ikke undersøgt, hvorledes denne metode opfører sig i sammenhæng med en feature-detektionsmetode. Derimod har jeg vist at metoden kan benyttes til at beregne et estimat for den fraktale dimension af et digitalt billede.

I litteraturen [Fie87, KFK90, RB94, Vos85, Pen84, Man82] findes, som omtalt i denne rapport, belæg for at billeder af naturlige scener er approksimative fraktaler, dvs. de er fraktaler i et afgrænset skalainterval. Field et al. finder at den fraktale dimension af billeder af naturlige scener er  $D_H \approx 2.5$ , hvilket er den samme dimension som den klassiske Brownske bevægelse. Bialek og Ruderman finder at den fraktale dimension er  $2.5 + \frac{\eta}{2}$ , hvor  $\eta = 0.19 \pm 0.01$ , hvilket kan modelleres med en fraktionel Brownsk bevægelse. Bialek og Ruderman viser også at billeder af naturlige scener har en ikke-Gaussisk sandsynlighedsfordeling, hvilket også kan modelleres ved hjælp af fraktionelle Brownske bevægelser. Mit valg af fraktionelle Brownske bevægelser som model for billeder af naturlige scener kan derfor berettiges.

Min skala-normaliseringsmetode ser udfra mine eksperimenter ud til at fungere, men en analyse af anvendelse af denne metode i sammenhæng med feature-detektion vil kunne belyse kvaliteten af min metode bedre. Dette ligger desværre udenfor denne rapports rammer. Det kan dog konkluderes at denne metode fungerer bedst på billeder med mange billedpunkter og med høj differentiationsorden.

En fordel ved min skala-normaliseringsmetode er som tidligere omtalt at den udover at kunne benyttes til normalisering af billedafledte i skalarum, også kan benyttes til at estimere den fraktale dimension af digitale billeder, hvilket er en herlig sidegevinst. Det kan konkluderes at estimater af den fraktale dimension vil være mest nøjagtige hvis man vælger en høj differentiationsorden og billedet indeholder et højt antal billedpunkter.

Man kunne muligvis forbedre kvaliteten af min skala-normaliseringsmetode ved at benytte en anden model for billeder af naturlige scener end fraktionelle Brownske bevægelser. Man kunne forestille sig brug af andre typer af fraktale funktioner, som f.eks. turbulens modeller.

Jeg mener, at jeg med denne rapport har gennemgået og besvaret de problemstillinger jeg har beskrevet i indledningen og i arbejdsbeskrivelsen til dette projekt på en tilfredsstillende måde.

Jeg vil igen gøre opmærksom på at dette skriftlige projekt, udover denne rapport, også består af en artikel, som er vedlagt denne rapport.

## A Appendix: Matlab-implementationen

I dette appendix findes kildeteksten til de programmer jeg har implementeret til denne rapport. Alle programmer er skrevet i matematiksystemet Matlabs programmeringsprog.

### A.1 Generator af kunstige fraktionelle Brownske flader

Funktionen `genf` tager tre parametre, to vektorer der angiver billedets størrelse, samt værdien af  $\alpha$ .

```
function y=genf(u,v,alfa)
% function y=f(u,v,alfa)
% u,v: Frekvens vektorene
% alfa: Proportionalitets parameteren
% y: Det kunstige billed der overholder Gaardings krav
% u og v skal have en længde der er en 2-potens.
% Generer billede udfra regler fra Gaarding artiklen.

n=length(u);
m=length(v);
nhalve=round(n/2)+1;
mhalve=round(m/2)+1;

rand('seed',flops);

for j=1:nhalve
    ks = mhalve;
    for k=1:m
        fase=randintr(0,2*pi);
        if (k==1 & (j==1 | j==nhalve)) | (j==1 & k==mhalve) | (k==mhalve & j==nhalve)
            y(j,k)=sqrt(sqrt(u(j)^2+v(k)^2))^( -alfa)*cos(fase);
        elseif (j==1 | j==nhalve) & (mhalve<k & k<=m)
            y(j,k)=conj(y(j,2*mhalve-k));
        elseif (1<j & j<nhalve) & (k>mhalve)
            y(j,k)=sqrt(sqrt(u(j)^2+v(ks)^2))^( -alfa)*(cos(fase)+sqrt(-1)*sin(fase));
            ks = ks-1;
        else
            y(j,k)=sqrt(sqrt(u(j)^2+v(k)^2))^( -alfa)*(cos(fase)+sqrt(-1)*sin(fase));
        end
    end
end

y((nhalve+1):n,1)=conj(flipud(y(2:(nhalve-1),1)));
y(nhalve+1:n,2:m)= conj(flipud(fliplr(y(2:nhalve-1,2:m))));
```

```
y=real(iff2(y));
```

### A.1.1 Randintr

I funktionen `genf` benyttes følgende funktion til at genererer et tilfældigt tal i et givet interval.

```
function r=randintr(min,max)
% randintr returnerer et tilfældig tal mellem min og max.
% Det antages at min<max.

tmp=abs(max-min)*rand;
if min==0
    r=tmp;
elseif max==0
    r=-tmp;
elseif min<0 & 0<max
    r=tmp+min;
elseif 0<min & 0<max
    r=tmp+min;
elseif min<0 & max<0
    r=tmp+min;
end
```

## A.2 1D Gaussisk støj og 1D integrerede Gaussisk støj

Denne kildetekst indeholder det program der genererer 1-dimensionel integrerede Gaussisk støj, samt laver graferne af 1-dimensionel Gaussisk støj.

```
% lav 1D-integrerede Gaussisk støj

% hent 2D Gaussisk støj billede.
z=dikuread('~/pic/brown/stoj.im');

x=z(128,:);
n=length(x);
t=1:n;

x=x-128;

for i=1:n
    y(i)=sum(x(1:i));
end

plot(t,y);
title('1D integrerede Gaussisk støj');
```

```

print -dps2 igaus1d.ps

Y=abs(fft(y)).^2;
Y=Y(1:n/2);

% Estimer hældningen af spektraet

p=polyfit(log10(t(1:n/2)),log10(Y),1)

semilogy(log10(t(1:n/2)),Y);
title('Spektraltætheden af 1D integrerede Gaussisk støj');
xlabel('log10(t)')
ylabel('|iGs|^2')
print -dps2 igaus1dps.ps

```

```

% 1D Gaussisk støj

plot(t,x);
title('1D Gaussisk støj');

```

```

print -dps2 gaus1d.ps

X=abs(fft(x)).^2;
X=X(1:n/2);

% Estimer hældningen af spektraet

p=polyfit(log10(t(1:n/2)),log10(X),1)

semilogy(log10(t(1:n/2)),X);
title('Spektraltætheden af 1D Gaussisk støj');
xlabel('log10(t)')
ylabel('|Gs|^2')
print -dps2 gaus1dps.ps

```

### A.3 2D Gaussisk støj

Dette program beregner spektraltætheden af et 2-dimensionelt Gaussisk støj billede. Programmet finder middelværdien af spektraltætheden for punkter med samme  $L_2$ -norm af punktets frekvens, dvs.  $|\vec{\omega}|$ , og opbygger Figur 2.

```

% Lav spektraltætheden af 2D Gaussisk støj

% hent 2D Gaussisk støj billede.
y=dikuread('~pic/brown/stoj.im');

```

```

y=y-128;

u=1:256;

Y=fft2(y);

[n,m]=size(Y);
nhalve=round(n/2)+1;
mhalve=round(m/2)+1;

Y=abs(Y).^2;

% Omform spektraet således at nulpunktet er i midten af billedet.

Y(1:nhalve,1:mhalve)=fliplr(flipud(Y(1:nhalve,1:mhalve)));
Y((nhalve+1):n,1:mhalve)=fliplr(flipud(Y((nhalve+1):n,1:mhalve)));
Y((nhalve+1):n,(mhalve+1):m)=fliplr(flipud(Y((nhalve+1):n,(mhalve+1):m)));
Y(1:nhalve,(mhalve+1):m)=fliplr(flipud(Y(1:nhalve,(mhalve+1):m)));

colormap(gray);
imagesc(y);
title('2D Gaussisk støj');
print -dps2 gaus2d.ps

% Beregn gennemsnittet

x=zeros(1,round(sqrt((n-nhalve)^2+(m-mhalve)^2))+2);
c=zeros(1,round(sqrt((n-nhalve)^2+(m-mhalve)^2))+2);

for i=1:n
    for j=1:m
        x(round(sqrt((i-nhalve)^2+(j-mhalve)^2))+1)=
            x(round(sqrt((i-nhalve)^2+(j-mhalve)^2))+1)+Y(i,j);
        c(round(sqrt((i-nhalve)^2+(j-mhalve)^2))+1)=
            c(round(sqrt((i-nhalve)^2+(j-mhalve)^2))+1)+1;
    end
end

z=x./c;

t=1:length(z);
semilogy(log10(t(2:length(z)-1)),z(2:length(z)-1));
title('Spektraltætheden af 2D Gaussisk støj');

```

```

xlabel('log10(t)')
ylabel('|Gs|^2')
print -dps2 gaus2dps.ps

```

```

% Estimer hældningen af spektra grafen.

```

```

p=polyfit(log10(t(2:length(z)-1)),log10(z(2:length(z)-1)),1)

```

#### A.4 Spektraltætheden af en syntetisk 1D fraktionel Brownsk bevægelse

Dette program opbygger Figur 5 og beregner gennemsnittet af det estimerede  $\alpha$  for 10 forskellige 1-dimensionelle fraktionelle Brownske bevægelser.

```

% 1D fraktionelle Brownske bevægelser

```

```

u=1:2048;

```

```

% alfa=2

```

```

% find gennemsnittet af det estimerede alfa for 10 forskellige

```

```

% fraktionelle Brownske bevægelser

```

```

for i=1:10

```

```

    y=genf(u,1,2);

```

```

    Y=fft(y);

```

```

    ps=(abs(Y).^2)';

```

```

    ps2=ps(2:length(ps)/2);

```

```

    % Estimer hældningen af spektraet.

```

```

    p=polyfit(log10(u(2:length(ps)/2)),log10(ps2),1)

```

```

    h(i)=p(1);

```

```

end

```

```

sum(h)/length(h)

```

```

plot(u,y)

```

```

title('1D fraktionel Brownsk bevægelse');

```

```

print -dps2 fbm1d.ps

```

```

semilogy(log10(u(2:length(ps)/2)),ps2)

```

```

title('Spektral tætheden af en 1D fraktionel Brownsk bevægelse');

```

```

xlabel('log10(t)')

```

```
ylabel('|B_H|^2')
print -dps2 powspec1d.ps
```

## A.5 Spektraltæthed af en syntetisk 2D fraktionel Brownsk bevægelse

Dette program benytter funktionen `genf`, beskrevet i Appendix A.1, til at genererer et syntetisk billede af en 2-dimensionel fraktionel Brownsk bevægelse. Programmet beregner derpå spektraltætheden af dette billede på samme måde som i Appendix A.3.

```
% Lav powerspektrum af fraktionelle Brownske bevaegelser

u=1:256;
y=genf(u,u,2);

Y=fft2(y);

[n,m]=size(Y);
nhalve=round(n/2)+1;
mhalve=round(m/2)+1;

Y=abs(Y).^2;

% Omform spektraet således at nulpunktet er i midten af billedet.

Y(1:nhalve,1:mhalve)=fliplr(flipud(Y(1:nhalve,1:mhalve)));
Y((nhalve+1):n,1:mhalve)=fliplr(flipud(Y((nhalve+1):n,1:mhalve)));
Y((nhalve+1):n,(mhalve+1):m)=fliplr(flipud(Y((nhalve+1):n,(mhalve+1):m)));
Y(1:nhalve,(mhalve+1):m)=fliplr(flipud(Y(1:nhalve,(mhalve+1):m)));

colormap(gray);
imagesc(y);
title('2D fraktionel Brownsk bevægelse');
print -dps2 fbm2d.ps

% Beregn gennemsnittet

x=zeros(1,round(sqrt((n-nhalve)^2+(m-mhalve)^2))+2);
c=zeros(1,round(sqrt((n-nhalve)^2+(m-mhalve)^2))+2);

for i=1:n
    for j=1:m
        x(round(sqrt((i-nhalve)^2+(j-mhalve)^2))+1)=
            x(round(sqrt((i-nhalve)^2+(j-mhalve)^2))+1)+Y(i,j);
        c(round(sqrt((i-nhalve)^2+(j-mhalve)^2))+1)=
            c(round(sqrt((i-nhalve)^2+(j-mhalve)^2))+1)+1;
```



```

    end
end

z=x./c;

t=1:length(z);
semilogy(log10(t(2:length(z)-1)),z(2:length(z)-1));
title('Spektraltæthed af en 2D fraktionel Brownsk bevægelse');
xlabel('log10(t)')
ylabel('|B_H|^2')
print -dps2 fbm2dps.ps

% Estimer hældningen af spektra grafen.

p=polyfit(log10(t(2:length(z)-1)),log10(z(2:length(z)-1)),1)

```

## A.6 2-dimensionelt estimat af $\alpha$

Denne kildetekst er et eksempel på estimering af  $\alpha$  ud fra  $L_2$ -normen skalarumbillederne af et 2-dimensionelt billede. Eksemplet indeholder data for tilfældet  $L_{ij}L_{ji}$  og  $\alpha = 1$ .

```

l=[317975 69303.4 15014.1 3228.46 687.997 144.995 30.1639 6.18737 1.24992 0.248675]
t=[2 2.70213 3.65076 4.93242 6.66403 9.00356 12.1644 16.4349 22.2047 30]

```

```
t=t.^2
```

```
% Estimer hældningen af spektra grafen.
```

```
p=polyfit(log10(t),log10(l),1)
```

```

semilogy(log10(t),l)
title('alfa = 1')
xlabel('log10(t)')
ylabel('L1-norm(LijLji)')
print -dps2 alfa1LijLji.ps

```

## A.7 1-dimensionelt estimat af $\alpha$

Denne kildetekst indeholder et Matlab program der genererer 1-dimensionelle fraktionelle Brownske bevægelser og udregner et estimat for  $\gamma$ .

```

% find alfa af 1d fkt. ved hjælp af skalarum
clear all;

```

```

n=2048;
u=1:n;
alfa=[1 1.5 2 2.5 3 4];
yud=zeros(6,n);
nud=zeros(6,10);
v=linspace(-120,120,n+1);
t=[2 2.70213 3.65076 4.93242 6.66403 9.00356 12.1644 16.4349 22.2047 30];

t=t.^2;

for j=1:6
    % Genererer 1D fraktionel Brownsk bevægelse
    y=genf(u,1,alfa(j));

    for i=1:10
        g=gaussfkt(v,t(i));
        gx=diff(g)./diff(v);
        l=conv(gx,y);
        m=length(l);
        l=l(round(n/2):m-round(n/2));
        n1(i)=norm(l.*1);
    end

    % Estimer hældningen af spektra grafen.

    p=polyfit(log10(t),log10(n1),1)

    yud(j,:)=y';
    nud(j,:)=n1;

end

plot(u,yud(1,:))
title('alfa = 1')
print -dps2 fbm1da1.ps

semilogy(log10(t),nud(1,:))
title('alfa = 1')
xlabel('log10(t)')
ylabel('L1-norm(LxLx)')
print -dps2 fbm1da1ps.ps

plot(u,yud(2,:))

```

```

title('alfa = 1.5')
print -dps2 fbm1da15.ps

semilogy(log10(t),nud(2,:))
title('alfa = 1.5')
xlabel('log10(t)')
ylabel('L1-norm(LxLx)')
print -dps2 fbm1da15ps.ps

plot(u,yud(3,:))
title('alfa = 2')
print -dps2 fbm1da2.ps

semilogy(log10(t),nud(3,:))
title('alfa = 2')
xlabel('log10(t)')
ylabel('L1-norm(LxLx)')
print -dps2 fbm1da2ps.ps

plot(u,yud(4,:))
title('alfa = 2.5')
print -dps2 fbm1da25.ps

semilogy(log10(t),nud(4,:))
title('alfa = 2.5')
xlabel('log10(t)')
ylabel('L1-norm(LxLx)')
print -dps2 fbm1da25ps.ps

plot(u,yud(5,:))
title('alfa = 3')
print -dps2 fbm1da3.ps

semilogy(log10(t),nud(5,:))
title('alfa = 3')
xlabel('log10(t)')
ylabel('L1-norm(LxLx)')
print -dps2 fbm1da3ps.ps

plot(u,yud(6,:))
title('alfa = 4')
print -dps2 fbm1da4.ps

```

```
semilogy(log10(t),nud(6,:))
title('alfa = 4')
xlabel('log10(t)')
ylabel('L1-norm(LxLx)')
print -dps2 fbm1da4ps.ps
```

### A.7.1 Gaussfkt

Programmet i Appendix A.7 benytter denne funktion `Gaussfkt`, som er en 1-dimensionel Gauss-funktion.

```
function y=gaussfkt(x,t)
% function y=gaussfkt(x,t)
% Gauss-funktionen af x med spredningen t.

D=1; % Dimensionen af Gauss-funktionen

y=1/(sqrt(2*pi*t)^D)*exp(-x.^2/(2*t));
```

## Referencer

- [BM89] J. J. Brehm and W. J. Mullin. *Introduction to the structure of matter, a course in modern physics*, chapter 3. Wiley, New York, 1989.
- [Bri88] E. Oran Brigham. *The Fast Fourier Transform and its applications*. Prentice Hall, 1988.
- [BT78] H. G. Barrow and J. M. Tenenbaum. Recovering intrinsic scene characteristics from images. In A. Hanson and E. Riseman, editors, *Computer Vision Systems*. New York: Academic, 1978.
- [DT93] M. Deriche and A. H. Tewfik. Signal modeling with filtered discrete fractional noise processes. *IEEE Transactions on signal processing*, 41(9):2839–2849, September 1993.
- [Fie87] D. J. Field. Relations between the statistics of natural images and the response properties of cortical cells. *Journal of Optical Society of America*, 4(12):2379–2394, December 1987.
- [FtHRKV94] L. M. J. Florack, B. M. ter Haar Romeny, J. J. Koenderink, and M. A. Viergever. Linear scalespace. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 4(4):325–351, 1994.
- [Går87] J. Gårding. A note on the application of fractals in image analysis. Technical Report TRITA-NA-P8716 CVAP 49, Computer Vision and Associative Pattern Processing Laboratory, Royal Institute of Technology, December 1987.
- [Hsu97] Hwei Hsu. *Probability, random variables, & random processes*. Schaum's Outline series. McGraw-Hill, San Francisco, 1997.
- [KFK90] D. C. Knill, D. Field, and D. Kersten. Human discrimination of fractal images. *Journal of Optical Society of America*, 7(6):1113–1123, June 1990.
- [Koe84] J. J. Koenderink. The structure of images. *Biological Cybernetics*, 50:363–370, 1984.
- [Lin94] T. Lindeberg. Scale selection for differential operators. Technical Report ISRN KTH/NA/P-9403-SE, Dept. of Numerical Analysis and Computing Science, Royal Institute of Technology, January 1994.
- [Lin96a] T. Lindeberg. Edge detection and ridge detection with automatic scale selection. Technical Report ISRN KTH/NA/P-96/06-SE, Dept. of Numerical Analysis and Computing Science, Royal Institute of Technology, June 1996.
- [Lin96b] T. Lindeberg. Scale-space: A framework for handling image structures at multiple scales. Technical Report CVAP-TN15, Dept. of Numerical Analysis and Computing Science, Royal Institute of Technology, September 1996.
- [Man82] B. B. Mandelbrot. *The fractal geometry of nature*. W. H. Freeman and company, San Francisco, 1982.

- [Mar82] D. Marr. *Vision*. W. H. Freeman & Co., 1982.
- [Mer70] E. Merzbacher. *Quantum Mechanics*. Wiley International, 2. edition, 1970.
- [MvN68] B. B. Mandelbrot and J. W. van Ness. Fractional brownian motions, fractional noises and applications. *SIAM Review*, 10(4):422–437, October 1968.
- [NFD97] M. Nielsen, L. Florack, and R. Deriche. Regularization, scale-space, and edge detection filters. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, (7):291–307, 1997.
- [Ott93] E. Ott. *Chaos in dynamical systems*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [Pen84] A. P. Pentland. Fractal-based description of natural scenes. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-6(6):661–674, November 1984.
- [RB94] D. L. Ruderman and W. Bialek. Statistics of natural images: Scaling in the woods. *Physical Review Letters*, 73(6):814–817, August 1994.
- [Spi92] M. R. Spiegel. *Mathematical Handbook of Formulas and Tables*. Schaum’s Outline series. McGraw-Hill, 1992.
- [tHR96] B. M. ter Haar Romeny. Introduction to scale-space theory: Multiscale geometric image analysis. Technical Report ICU-96-21, Utrecht University, September 1996.
- [Vos85] R. F. Voss. Random fractal forgeries. In R. A. Earnshaw, editor, *Fundamental Algorithms for Computer Graphics*, volume 17, pages 805–835. Springer-Verlag, Berlin, 1985.